

دانش مدیریت  
شماره ۶۲ - پاییز ۱۳۸۲  
صص ۶۴-۵۱

## استفاده از تابع توزیع احتمال در برنامه‌ریزی و کنترل پروژه

دکتر محمدعلی سوخکیان \* محمد سجادیان \*\*

### چکیده

در این مقاله پس از تشریح روش پرت<sup>۱</sup>، دلایل عدم کارایی این روش بیان می‌گردد. آن‌گاه استفاده از تابع توزیع احتمال با رویکردهای مختلف آن، به‌عنوان یک روش جدید معرفی می‌شود. این روش، نواقص روش پرت را که ناشی از فرض‌های ساده‌کننده و غیر واقعی آن است، برطرف می‌نماید. فرض‌هایی که باعث می‌شوند زمان تکمیل پروژه با استفاده از روش پرت کمتر از زمان واقعی آن تخمین زده شود.

**واژه‌های کلیدی:** برنامه‌ریزی<sup>۲</sup>، کنترل پروژه<sup>۳</sup>، روش پرت، تابع توزیع احتمال<sup>۴</sup>، شبیه‌سازی مونت کارلو<sup>۵</sup>، معیار بحرانی<sup>۶</sup>.

---

\* استادیار بخش مدیریت دانشگاه شیراز  
\*\* کارشناس ارشد مدیریت صنعتی دانشگاه شیراز

1. Project Evaluation & Review Technique
2. Planning
3. Project Control
4. Probability Distribution Function
5. Monte Carlo Simulation
6. Critical Criteria

## مقدمه

پروژه به فرآیندی گفته می‌شود که در نقطه مشخصی از زمان شروع و در نقطه مشخصی از آن نیز به پایان برسد. یک پروژه زمانی به پایان می‌رسد که به هدفی مشخص، عینی و قابل ارزیابی رسیده باشد. هر پروژه در اجرا به فعالیت‌های گوناگونی تجزیه می‌شود که هر کدام از آنها باید در زمان و مکان مشخص و با هزینه معین اجرا گردند. برنامه‌ریزی شامل تعیین فعالیت‌ها و تقدم و تأخر آنها، همچنین تعیین میزان امکانات لازم برای اجرای آنها است. برای برنامه‌ریزی پروژه از تکنیک‌ها و روش‌های مختلفی استفاده می‌شود. به‌طور کلی این روش‌ها را به دو گروه کلاسیک و مدرن می‌توان تقسیم‌بندی کرد. اگرچه روش‌های کلاسیک در مراکز صنعتی و خدماتی معمول است، ولیکن دارای نواقصی هستند که مدیریت را در عمل دچار مشکل می‌سازند. این امر پیامدهای منفی بسیاری برای پیمانکاران و برنامه‌ریزان بخش صنعت و خدمات به دنبال خواهد داشت، که از آن جمله می‌توان به پرداخت هزینه‌های دیرکرد و از دست دادن مناقصه‌های آتی به این سبب، اشاره کرد. وظیفه اصلی مدیر پروژه را می‌توان ایجاد هماهنگی لازم در اجرای فعالیت‌ها، برای کاربرد مناسب منابع و امکانات، به منظور رسیدن به هدف نهایی پروژه در زمان از پیش تعیین شده دانست.

## روش پرت

محاسبات مربوط به تعیین زمان تکمیل پروژه پس از طراحی شبکه و مشخص شدن زمان‌های لازم برای انجام هر فعالیت، صورت می‌گیرد. گاهی، مدت اجرای فعالیت‌ها مشخص و ثابت‌اند، اما در بسیاری از مواقع، اجرای یک فعالیت در مدت زمان مشخص تحت تأثیر عوامل مختلفی قرار می‌گیرد و زمان مربوط را متغیر می‌سازد. به عبارت دیگر اجرای فعالیت‌ها با احتمالات توأم می‌گردد. در موقعیت‌های احتمالی، برای هر فعالیت زمان‌های مختلفی وجود دارد که هر یک از آنها با احتمال مشخصی می‌توانند رخ دهند. در چنین مواقعی از روش پرت برای برنامه‌ریزی زمانی استفاده می‌شود. مبنای محاسبه زمان انجام و تکمیل پروژه در روش پرت همانند سایر روش‌های کلاسیک بر تعیین مسیر بحرانی<sup>۱</sup> استوار است. در هر شبکه حداقل یک راه وجود دارد که شامل طولانی‌ترین زمان

1. Critical Path

است و به آن، مسیر بحرانی می‌گویند. فعالیت‌هایی که روی مسیر بحرانی قرار می‌گیرند به هیچ وجه نباید دچار تأخیر شوند. بنابراین مهم‌ترین هدف در این روش، شناخت فعالیت‌های بحرانی و تمرکز بر روی آن‌ها به منظور حداقل کردن زمان و هزینه کل عملیات است.

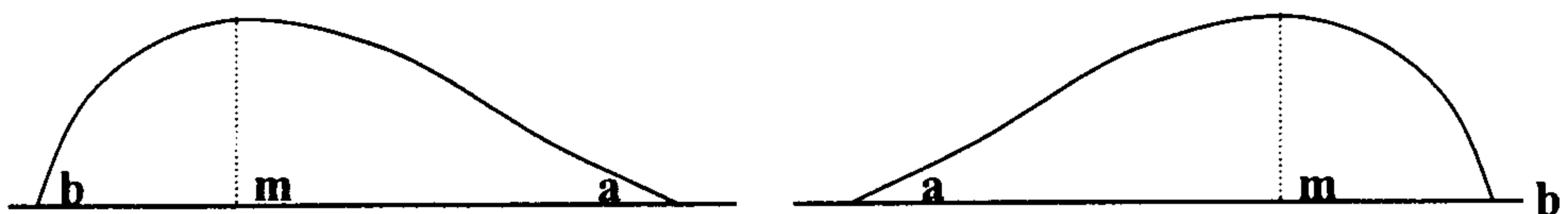
در روش پرت، برای زمان انجام فعالیت‌ها تخمین‌های احتمالی در نظر گرفته می‌شود. سه تخمین زمانی برای فعالیت‌ها به ترتیب زیر است:

زمان خوش‌بینانه (a): در این حالت، تخمین زمان فعالیت بر حسب کوتاه‌ترین زمان ممکن برای انجام آن فعالیت در نظر گرفته می‌شود و فرض را بر آن می‌گذارند که هیچ محدودیت و یا مشکلی در حین انجام فعالیت، اتفاق نمی‌افتد.

زمان بدبینانه (b): تخمین زمان انجام هر فعالیت در این حالت، بر حسب حداکثر زمان ممکن برای انجام آن فعالیت در نظر گرفته می‌شود و فرض را بر آن می‌گذارند که همه شرایط و عواملی که موجب تأخیر افتادن فعالیت‌های پروژه می‌شوند، اتفاق خواهند افتاد.

زمان با بیش‌ترین احتمال (m): این حالت، محتمل‌ترین زمانی است که هر کدام از فعالیت‌های پروژه تکمیل خواهند شد. به عبارت دیگر اگر فعالیت مزبور را در شرایط مشابه تکرار نماییم، احتمال اتفاق افتادن این زمان از بقیه زمان‌ها بیش‌تر خواهد بود.

این تخمین‌های زمانی را مدیران و یا کسانی که آشنایی کامل با فعالیت‌های پروژه دارند، انجام می‌دهند. در تخمین‌های احتمالی شبکه، هر یک از فعالیت‌ها دارای یک توزیع احتمالی بوده و بر حسب این که مدت انجام آن فعالیت به طرف کدام یک از سه زمان برآورد شده (a, m, b) گرایش داشته باشد، زمان مورد انتظار (Te) به صورت یکی از نمودارهای زیر دیده می‌شود:



نمودار ۱.

منحنی‌های فوق‌شکلی از منحنی نرمال است که دارای خمیدگی به طرف راست یا چپ است و به توزیع بتا مشهور است. معمولاً توزیع بتا برای شرح تغییرپذیری تخمین زمان‌های فعالیت مورد استفاده قرار می‌گیرد. این توزیع می‌تواند بر اساس ماهیت یک

فعالیت خاص، دارای پراکندگی یا چولگی به سمت راست یا چپ باشد. میانگین و واریانس این توزیع را به راحتی می توان از تخمین های زمانی (a,b,m) به دست آورد. این توزیع تمرکز بالایی در اطراف زمان محتمل دارد. در تجزیه و تحلیل شبکه زمان مورد نیاز (Te) و واریانس هر فعالیت ( $\sigma^2$ ) را می توان محاسبه نمود. زمان مورد انتظار هر فعالیت به صورت میانگین وزنی تخمین های سه زمان و به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\text{رابطه (۱)} \quad Te = (a + 4m + b) / 6$$

از زمان به دست آمده، به عنوان زمان انجام یک فعالیت، در محاسبات مربوط به تعیین زمان تکمیل پروژه استفاده می شود. واریانس زمان هر فعالیت به صورت مربع  $1/6$  تفاوت بین تخمین های زمانی خوش بینانه و بدبینانه و به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\text{رابطه (۲)} \quad \sigma' = [b - a] / ۳۶$$

واریانس، نشان دهنده درجه عدم اطمینان مربوط به زمان انجام فعالیت است. هر چه مقدار واریانس بزرگ تر باشد، عدم اطمینان بیش تری نسبت به انجام فعالیت در زمان تعیین شده وجود دارد. به عنوان مثال، زمان احتمالی فعلیتی با واریانس ۱۶ دارای عدم اطمینان بیش تری نسبت به فعلیتی با واریانس ۶ است. برای به دست آوردن انحراف معیار زمان مورد انتظار هر مسیر نیز می توانیم واریانس همه فعالیت های واقع بر روی هر مسیر را با یکدیگر جمع زده و جذر عدد به دست آمده را با فرمول زیر محاسبه کنیم:

$$\text{رابطه (۳)} \quad \sigma = \sqrt{\text{مجموع واریانس فعالیت های روی مسیر}} \quad \sigma \text{ مسیر}$$

آگاهی از زمان های مورد انتظار و انحراف استاندارد هر مسیر مدیریت را قادر می سازد تا تخمین های احتمالی زمان تکمیل پروژه را محاسبه نموده و مشخص نماید که آن پروژه خاص با چه احتمالی در یک مدت از پیش تعیین شده تکمیل می شود.

### تعیین احتمال تکمیل پروژه در یک زمان معین

با استفاده از قواعد احتمالات، مدیر پروژه می تواند درصد اطمینان تکمیل پروژه را در زمان معین و یا از پیش تعیین شده، محاسبه نماید. با استفاده از جدول نرمال استاندارد (این جدول در اغلب کتاب های آمار وجود دارد)، می توان احتمال تکمیل پروژه را در یک زمان از پیش تعیین شده محاسبه نمود.

با استفاده از فرمول استاندارد کردن نرمال می توان این مقدار را محاسبه کرد:

$$Z = (D - T_e) / S \quad \text{رابطه (۴)}$$

به طوری که:

$D$  = زمان از پیش تعیین شده

$T_e$  = زمان مورد انتظار انجام پروژه

$S$  = مقدار انحراف معیار مسیر بحرانی

### نکاتی در مورد محدودیت‌های روش پرت

در روش پرت سه زمانه، فرض‌های ساده‌کننده زیادی در نظر گرفته می‌شود که در این جا به چند مورد آن اشاره می‌کنیم:

۱. فرض‌هایی که مرتبط با هر فعالیت‌اند:

الف. فرض این که هر فعالیت دارای تابع توزیع بتا با سه زمان خوش‌بینانه، بیش‌ترین احتمال وقوع، و بدبینانه است.

ب. فرض این که میانگین و واریانس هر یک از فعالیت‌ها برابر است با:

$$\mu = (a + 4m + b) / 6$$

$$\sigma^2 = [b - a]^2 / 36$$

۲. فرض‌هایی که در ارتباط با کل پروژه هستند شامل موارد ذیل‌اند:

الف. فرض استقلال زمان انجام فعالیت‌ها از یکدیگر.

ب. فرض این که مسیر بحرانی به‌اندازه کافی از سایر مسیرها بزرگ‌تر است و مسیر بحرانی دیگری وجود ندارد.

اکنون فرض‌های فوق را نقد می‌کنیم:

از فرض‌های ۱ و ۲ نتیجه می‌شود که زمان انجام پروژه، دارای تابع توزیع نرمال است. میانگین تابع توزیع نرمال فوق برابر است با جمع میانگین زمان انجام فعالیت‌های واقع بر روی مسیر بحرانی ( $Y_N$ ). واریانس تابع توزیع نرمال فوق نیز برابر است با جمع واریانس فعالیت‌های واقع بر روی مسیر بحرانی ( $\sigma_N^2$ ). بنابراین احتمال آن که زمان انجام پروژه کوچک‌تر یا مساوی  $t$  باشد، به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\Pr[T_N \leq t] = \phi[(t - Y_N) / \sigma_N] \quad \text{رابطه (۵)}$$

در محاسبه زمان تکمیل پروژه از طریق روش پرت، تنها میانگین و واریانس زمان انجام فعالیت‌ها در نظر گرفته می‌شود. از این جهت، تابع توزیع بتا با سه زمان خوش‌بینانه، بیش‌ترین احتمال وقوع، و بدبینانه ممکن است در برخی موارد قابل کاربرد نباشد.

علاوه بر خطاهای مربوط به فرضیات فوق، اگر میانگین و واریانس زمان انجام هر فعالیت نیز، به‌طور صحیح به دست آید، در تعیین میانگین و واریانس زمان تکمیل پروژه، خطاهای مشخص دیگری ممکن است صورت گیرد. این کار به دلایل زیر اتفاق می‌افتد:

اول این که نحوه محاسبه زمان مورد انتظار و واریانس زمان هر فعالیت به صورت خوش‌بینانه (a)، با بیش‌ترین احتمال (m)، و بدبینانه (b) نمی‌تواند دربرگیرنده تمام زمان‌های احتمالی برای یک فعالیت باشد.

دوم این که زمان انجام هر فعالیت به‌طور قطعی برابر با مقدار مورد انتظار آن‌ها در نظر گرفته می‌شود. در نتیجه، محاسبه‌ی مسیر بحرانی پروژه به صورت غیر احتمالی صورت می‌گیرد، در حالی که زمان انجام هر فعالیت یک متغیر تصادفی است. با توجه به این نکته، محاسبه مسیر بحرانی پروژه باید با استفاده از توزیع چند متغیر تصادفی و به صورت احتمالی انجام گیرد.

سوم این که برای به دست آوردن توزیع احتمال زمان کل پروژه در روش پرت، از قضیه حد مرکزی استفاده می‌شود. استفاده از این قضیه در صورتی صحیح است که تعداد فعالیت‌های واقع بر روی مسیر بحرانی، حداقل برابر ۳۰ باشد. در پروژه‌های کوچک تعداد فعالیت‌هایی که بر مسیر بحرانی قرار می‌گیرند، ممکن است به تعداد قابل توجهی از ۳۰ کمتر باشد. پس در این گونه پروژه‌ها استفاده از قضیه حد مرکزی صحیح نیست. به جای استفاده از این قضیه، باید توزیع احتمال زمان کل پروژه را به دست آورد. توزیع احتمالی زمان کل پروژه از طریق تعیین توزیع زمان هر فعالیت روی مسیر بحرانی، و با استفاده از تئوری احتمالات به دست می‌آید.

چهارم این که فرض استقلال زمان انجام فعالیت‌ها از یکدیگر همیشه صادق نیست. برای تحقق این فرض، دو شرط باید وجود داشته باشد: این که زمان هر فعالیت، نباید تابعی از زمان فعالیت دیگر باشد؛ و هر فعالیت بایستی تنها بر روی یک مسیر قرار گیرد. این شروط در اکثر پروژه‌ها نقض شده و قابل تعمیم نیست.

در روش پرت فرض می‌شود که در شبکه‌ها تنها یک مسیر بحرانی وجود دارد و با تکمیل فعالیت‌های واقع بر روی مسیر بحرانی، پروژه نیز تکمیل می‌شود. در صورتی که

ممکن است در عمل، مسیرهای دیگری در شبکه موجود باشند که نسبت به مسیر بحرانی به زمان بیش‌تری نیاز داشته باشند. این امر منجر به این می‌شود که پروژه دیرتر از زمان انتظار، تکمیل گردد.

### استفاده از تابع توزیع احتمال در تعیین زمان تکمیل پروژه

به منظور رفع محدودیت‌های تکنیک پرت، روش‌های مختلفی ارائه گردیده است. روش‌های پیشنهادشده برای شبکه‌های احتمالی را در سه گروه عمده می‌توان قرار داد. این سه گروه عبارتند از:

۱. روش‌های تحلیلی
۲. روش‌های تقریب‌گیری پارامترهای زمان تکمیل
۳. روش شبیه‌سازی مونت کارلو.

#### ۱. روش‌های تحلیلی

روش‌های تحلیلی برای تعیین تابع توزیع احتمال و یا تقریب‌گیری آن، مورد استفاده قرار می‌گیرند. این روش‌ها به دو گروه تقسیم می‌شوند: گروه اول شامل روش‌هایی است که برای تقریب‌گیری توزیع زمان تکمیل پروژه ارائه شده‌اند؛ و گروه دوم در مورد ارزیابی تابع توزیع  $F(t)$  مربوط است به محاسبه تخمین‌های حد بالاتر و پایین‌تر این توزیع‌ها. در عمل این روش‌ها فقط برای شبکه‌هایی کاربرد دارد که فعالیت‌های آن دارای توابع توزیع گسسته هستند.

#### ۲. روش‌های تقریب‌گیری پارامترهای زمان تکمیل

یکی از روش‌ها، برای بهبود تخمین زمان در شبکه‌های پرت احتمالی، تقریب‌گیری توابع توزیع احتمال زمان تکمیل پروژه، از طریق توابع توزیع احتمال ساده‌تر است. برای مثال تابع توزیع احتمال را می‌توان در چند نقطه تقریب‌گیری کرد و از این طریق شبکه احتمالی را تا حد ممکن به یک شبکه معین تبدیل نمود.

#### ۳. روش شبیه‌سازی مونت کارلو

در این روش برای حل مشکل فعالیت‌های مشترک در شبکه‌های پرت احتمالی از نمونه‌گیری استفاده می‌شود. مطلوبیت روش مونت کارلو بستگی دارد به نسبت فعالیت‌های غیر مشترک به فعالیت‌های مشترک. یک فعالیت غیر مشترک، فعالیتی است که بر روی

مسیر خاص واقع شده است. هر چه نسبت فعالیت‌های غیرمشترک به فعالیت‌های مشترک بزرگ‌تر باشد، روش مونت کارلو کاراتر خواهد بود. فرآیند شرطی کردن برای ما این امکان را فراهم می‌سازد تا بتوانیم از روش تحلیلی برای باقی‌مانده شبکه استفاده کنیم. یعنی به جای این که دقیقاً همان مقادیر نمونه روش مونت کارلو را مورد استفاده قرار دهیم، می‌توانیم همه اطلاعات موجود در باره‌ی توابع توزیع زمان‌های فعالیت را به کار بگیریم.

### روش پیشنهادی جامع

همان‌طور که گفته شد کاربرد تابع توزیع احتمال جهت تخمین زمان تکمیل پروژه از مدل‌های مختلفی منتج شده است که هر کدام از آن‌ها قابلیت‌های متفاوتی دارند. روشی که در این مقاله از آن به عنوان کاربرد تابع توزیع احتمال در تخمین زمان تکمیل پروژه استفاده شده، روش پیشنهادی سوخکیان (۱۹۹۸) تحت عنوان روش پیشنهادی جامع است. این نظریه مبتنی است بر کاهش موازی - سری مارتین<sup>۱</sup> (۱۹۶۵)؛ در شبکه‌های پرت شرطی کردن راینگر<sup>۲</sup> (۱۹۶۹)؛ و در مورد زمان‌های فعالیت‌های خاص و نمونه‌گیری شرطی شبکه‌های احتمالی گارمن<sup>۳</sup> (۱۹۷۲). در این روش به جای فرض ثابت بودن زمان فعالیت انتخاب‌شده در مقادیر نمونه، فعالیت‌های انتخاب‌شده با ثابت فرض کردن متغیرهای تصادفی در زمان‌های وقوع‌شان شرطی می‌شوند. بنابراین برای شبکه‌هایی که فعالیت‌های آن به طور پیوسته توزیع شده‌اند، قدم اول در روش پیشنهادی گسسته کردن توزیع‌های پیوسته است.

در این روش ابتدا فعالیت‌های موازی و سری شبکه در هم ادغام گردیده و سپس بر روی اولین فعالیت، عمل شرطی شدن انجام می‌شود. این عمل تا زمانی انجام می‌گیرد که شبکه به یک فعالیت معادل تبدیل شود. به طوری که گره ابتدایی آن اولین گره و گره انتهایی آن آخرین گره شبکه باشد. در این حالت تابع توزیع به دست آمده، تابع زمان تکمیل پروژه است. در ادغام شبکه، دو فرآیند جمع‌زدن و بزرگ‌ترگیری همواره مورد استفاده قرار می‌گیرد. در ادامه به تشریح آن‌ها می‌پردازیم.

1. Martin  
2. Ringer  
3. Garmen

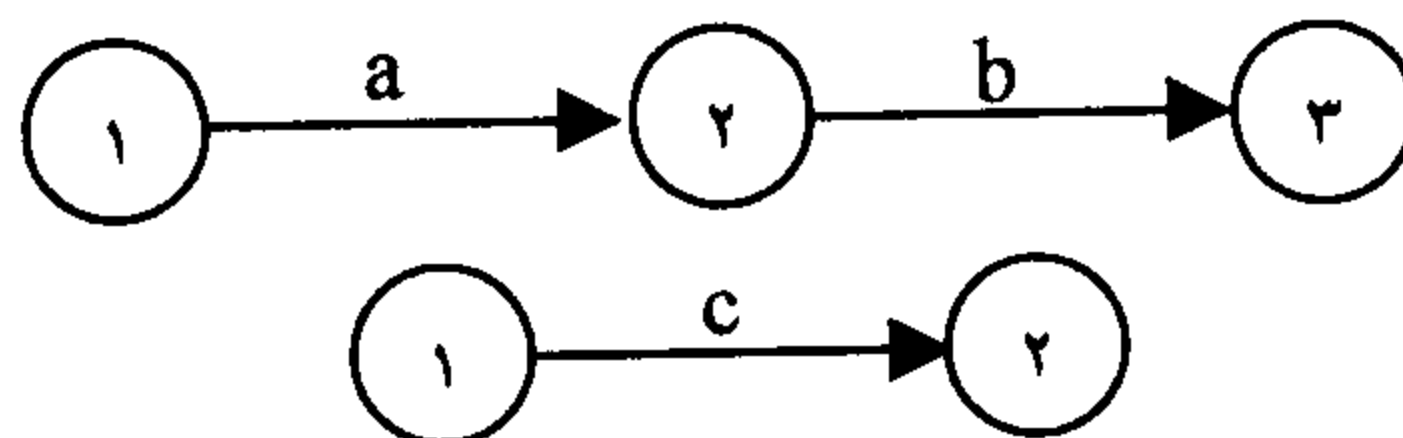


### ۱. عملیات جمع زدن

زمان‌های وقوع دو فعالیت سری می‌تواند با ترکیب دو فعالیت و ایجاد یک فعالیت معادل محاسبه گردد. تابع توزیع زمان فعالیت معادل برابر با مجموع تابع چگالی احتمال این فعالیت‌ها است. این عمل جمع‌زدن نامیده می‌شود. دو فعالیت (پیکان) سری را در نظر بگیرید، که در شکل (۲) نشان داده شده است.  $Yb$  و  $Ya$  را زمان‌های وقوع  $a$  و  $b$ ، به ترتیب با تابع چگالی احتمال  $Fb(t)$  و  $Fa(t)$  قرار دهید.  $c$  فعالیت معادل است. اگر فعالیت  $a$  در زمان صفر شروع شود، پس زمان وقوع گره سوم متغیری تصادفی است که با  $Yc$  بیان می‌شود و برابر با  $Yc = Ya + Yb$  است. تابع چگالی احتمال  $Yc$  به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$Fc(t) = \Pr(Yc \leq t) = \int_0^t Fa(t-y) dFb(y) = Fa(t-y) * Fb(y) \quad (6) \text{ رابطه}$$

به طوری که (\*) یک عمل جمع زدن است. توجه کنید که با هر عمل جمع‌زدن، تعداد گره‌ها و فعالیت‌ها کاهش می‌یابد. بدین ترتیب که شبکه یک فعالیت جدید به دست می‌آورد، ولی دو فعالیت از دست می‌دهد.



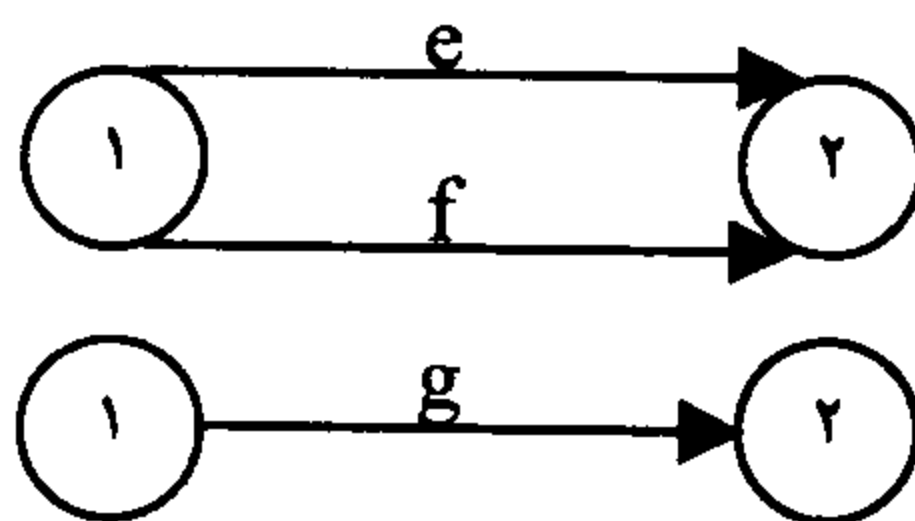
نمودار ۲. ترکیب فعالیت‌های سری  $a$  و  $b$

### ۲. عمل انتخاب بزرگ‌ترین عدد

با حداکثر زمان وقوع دو فعالیت موازی، یک فعالیت معادل حاصل می‌گردد. تابع توزیع زمان فعالیت معادل با ضرب تابع چگالی احتمال این فعالیت‌ها به دست می‌آید. این عمل، عمل انتخاب بزرگ‌ترین عدد نامیده می‌شود. دو فعالیت موازی را در نظر بگیرید که در شکل (۳) نشان داده شده‌اند.  $Yf$  و  $Yc$  را زمان‌های وقوع  $e$  و  $f$ ، با تابع چگالی احتمال  $Ff(t)$  و  $Fc(t)$  در نظر بگیرید.  $g$  فعالیت معادل است. اگر گره ۱ در زمان صفر شروع شود، در نتیجه زمان وقوع گره ۲ یک متغیر تصادفی است که با  $Yg$  نشان داده می‌شود و با  $Yg = \max\{Ye, Yf\}$  تعیین می‌شود. تابع چگالی احتمال  $Yg$  به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \Pr[Yg \leq t] &= \Pr[\max(Yc, Yf) \leq t] = \Pr[Ye \leq t \text{ and } Yf \leq t] \\ &= \Pr[Ye \leq t] * \Pr[Yf \leq t] \quad \text{با فرض استقلال} \\ Fg(t) &= Fe(t).Ff(t) \quad \text{بنابراین:} \end{aligned}$$

که  $Fg(t)$  عمل انتخاب بزرگ‌ترین عدد است. در عمل انتخاب بزرگ‌ترین عدد، تعداد فعالیت‌ها به یک واحد کاهش می‌یابد. در نمودار (۳) شبکه یک فعالیت جدید به دست می‌آورد، اما دو فعالیت از دست می‌دهد.



نمودار ۳. ترکیب فعالیت‌های موازی  $e$  و  $f$

### ۳. معیار بحرانیت

یکی از مفاهیم گمراه‌کننده در روش پرت قراردادی، استنباط این موضوع است که در شبکه‌های پرت تنها یک مسیر بحرانی وجود دارد. از آنجا که زمان تکمیل فعالیت‌ها، متغیر تصادفی با تابع توزیع پیوسته یا گسسته است، به‌طور کلی هر کدام از مسیرها بسته به مقداری که در عمل، زمان انجام هر فعالیت می‌تواند داشته باشد، می‌تواند بحرانی باشد. بنابراین برای هر فعالیت احتمالی وجود دارد که نشان‌دهنده بحرانی یا غیر بحرانی بودن آن است.

اگر  $P$  را مجموعه کلیه مسیرها در شبکه پرت در نظر بگیریم و  $Z(T_1)$  مدت زمان مسیر  $T_1 \in P$  باشد، پس  $Z(T_1) = \sum_{(ij) \in T_1} Y_{ij}$  که  $Y_{ij}$  زمان کمان  $(ij) \in A$  است. بحرانیت مسیر  $T_1 \in P$  با این احتمال که زمان  $Z(T_1)$  بزرگ‌تر یا مساوی با مدت زمان همه مسیرهای دیگر باشد، اندازه‌گیری می‌شود. این احتمال شاخص بحرانیت مسیر نامیده می‌شود و با  $CP$  نشان داده می‌شود. بنابراین برای هر مسیر  $T_1 \in P$ :

$$CP(T_1) = P[Z(T_1) \geq Z(T_q) \forall T_q \in P; T_1 \neq T_q]$$

شاخص بحرانیت یک فعالیت که با  $CA$  نشان داده می‌شود، با مجموع شاخص‌های بحرانیت مسیرهای شامل آن تعریف می‌شود.

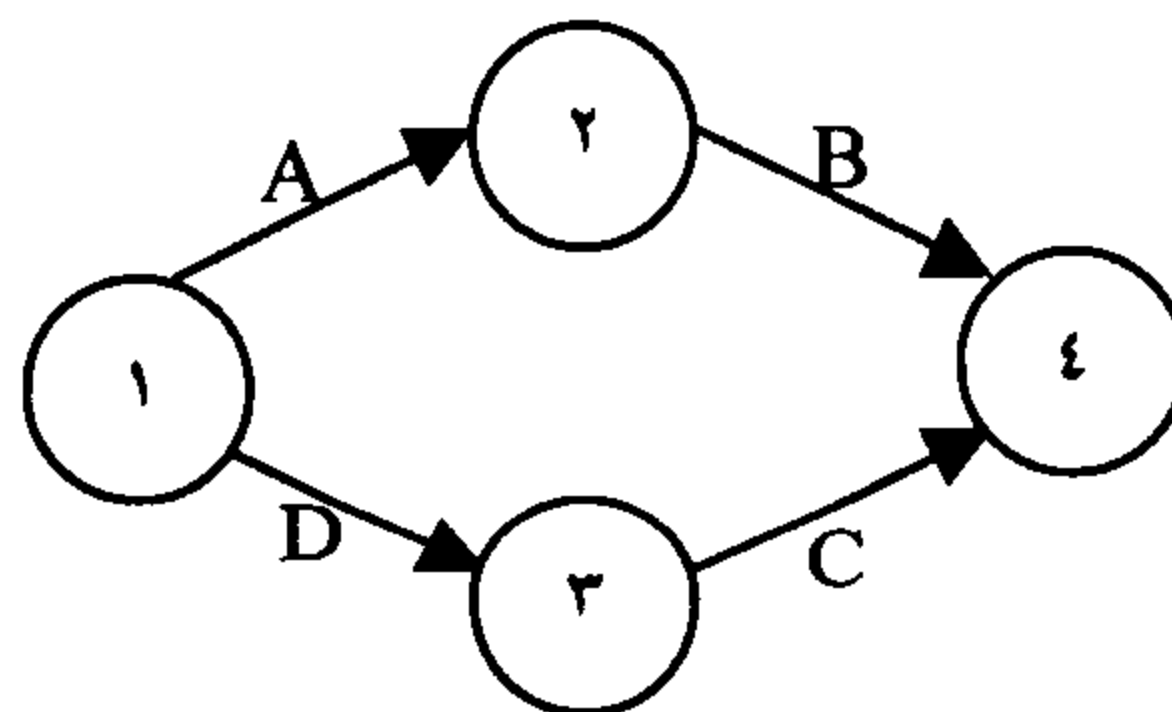
$$CA_{(ij)} = \sum_{T_1} CP(T_1)$$

بنابراین برای هر فعالیت  $(ij) \in A$ :

بدیهی است که هر چه  $CA_{(ij)}$  بزرگ‌تر باشد، فعالیت قطعی‌تر است و بالعکس.  $CA$  معیار مفیدی برای سنجش میزان توجه به یک فعالیت است، زیرا حاوی اطلاعات بیش‌تری نسبت به مفهوم مسیر بحرانی است. مخصوصاً  $CA$ ها مشخص می‌کنند که کدام فعالیت‌ها حساس‌ترند و باید سریع‌تر انجام شوند. به عبارت دیگر در مدل‌های تصادفی، بحرانیت یک فعالیت می‌تواند با ارزش‌تر از بحرانیت یک مسیر باشد. در قسمت زیر، روش محاسبه زمان تکمیل پروژه و معیار بحرانیت برای یک شبکه ساده ارائه می‌گردد.

#### ۴. روش محاسبه

شبکه زیر را در نظر بگیرید. نگاره ۱ نشان‌دهنده توزیع زمان انجام فعالیت‌ها است.

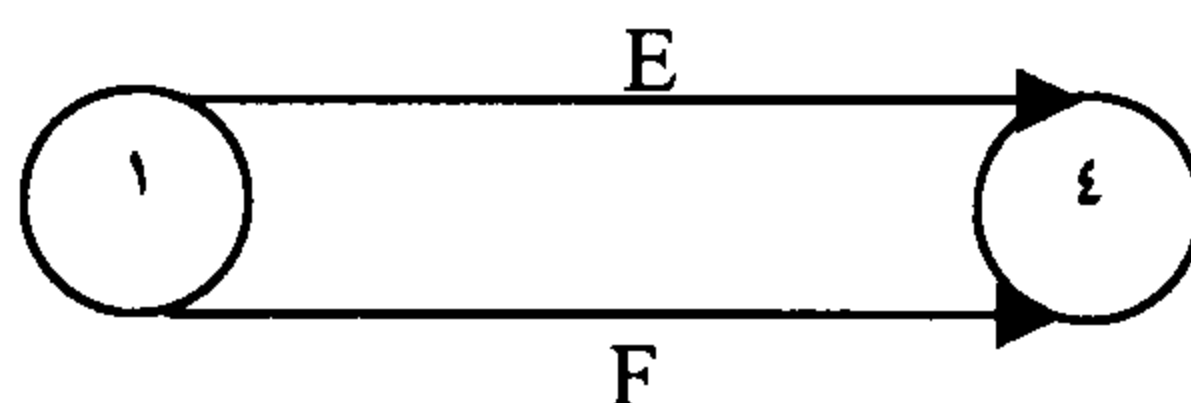


با استفاده از روش پرت مسیر (۱-۲-۴) که شامل فعالیت‌های A و B است به عنوان مسیر بحرانی انتخاب می‌گردد، زیرا مجموع میانگین زمان فعالیت‌های این مسیر  $(\frac{4}{4} + \frac{6}{6} = 11)$  از مجموع میانگین زمان فعالیت‌های مسیر دیگر  $(\frac{9}{1} + \frac{1}{8} = \frac{10}{9})$  بیش‌تر است. در حالی که محاسبات روش پیشنهادی نشان می‌دهد که بحرانیت مسیر (۱-۳-۴) از دو برابر بحرانیت مسیر (۱-۲-۴) که به روش پرت به عنوان مسیر بحرانی انتخاب شده است، بیش‌تر است.

نگاره ۱. توزیع زمان انجام فعالیت‌ها

فعالیت	زمان‌های انجام	احتمال متناظر	میانگین	واریانس
A	۴	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{1}{24}$
	۵	$\frac{1}{4}$		
B	۶	$\frac{1}{4}$	$\frac{6}{6}$	$\frac{1}{24}$
	۷	$\frac{1}{6}$		
C	۱	$\frac{1}{1}$	$\frac{9}{1}$	$\frac{1}{36}$
	۱۰	$\frac{1}{9}$		
D	۱	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
	۲	$\frac{1}{8}$		

روش محاسبه زمان تکمیل پروژه و معیار بحرانیته به طریق زیر است:  
 با استفاده از عملیات جمع زدن برای فعالیت‌های A و B فعالیت E، و برای فعالیت‌های C و D فعالیت F حاصل می‌شود. بعد از این ادغام شبکه به صورت زیر در می‌آید:



توزیع زمان انجام E و F در نگاره ۲ آمده است:

نگاره ۲. توزیع زمان انجام E و F

زمان‌ها	احتمال متناظر	احتمال تجمعی	زمان‌ها	احتمال متناظر	احتمال تجمعی
۴+۵=۱۰	$0/6 \times 0/4 = 0/24$	0/24	۱+۱=۲	$0/1 \times 0/2 = 0/02$	0/02
۵+۶ و ۴+۷=۱۱	$0/6 \times 0/6 \times 0/4 = 0/52$	0/76	۱+۲=۳	$0/1 \times 0/8 = 0/08$	0/1
۵+۷=۱۲	$0/4 \times 0/6 = 0/24$	۱	۱۰+۱=۱۱	$0/9 \times 0/2 = 0/18$	0/28
			۱۰+۲=۱۲	$0/9 \times 0/8 = 0/72$	۱
F = ۱۰/۹      واریانس = ۷/۴۵			E = ۱۱      واریانس = ۰/۴۸		

برای تعیین توزیع زمان تکمیل پروژه بایستی عملیات بزرگ‌ترگیری را بر روی توزیع زمان‌های E و F انجام داد. این عمل را در نگاره ۳ ملاحظه می‌کنید.

نگاره ۳. توزیع زمان تکمیل پروژه

زمان‌ها	احتمالات متناظر	احتمال تجمعی
Max (۱۰,۳)=۱۰	$0/024 - 0 = 0/024$	$(0/24)(0/1) = 0/024$
Max (۱۱,۱۱)=۱۱	$0/2128 - 0/024 = 0/1888$	$(0/76)(0/28) = 0/2128$
Max (۱۲,۱۲)=۱۲	$1 - 0/2128 = 0/7872$	$1 \times 1 = 1$
E = ۱۱/۷۶۳۲      واریانس = ۰/۲۲۸۷		

روش پرت میانگین زمان تکمیل پروژه را  $(6/6 + 4/4 = 11)$  با واریانسی  $(0/24 + 0/24 = 0/48)$  تعیین می‌کند. در حالی که میانگین واقعی زمان تکمیل پروژه برابر  $E = 11/7632$  و واریانس واقعی زمان تکمیل پروژه برابر  $0/2287$  است. در روش پرت میانگین زمان تکمیل پروژه معمولاً کمتر از مقدار واقعی تعیین می‌گردد، اما واریانس زمان تکمیل پروژه بعضی مواقع بیش‌تر و بعضی مواقع کمتر از مقدار واقعی تعیین می‌گردد. محاسبه‌ها مربوط به تعیین بحرانیته مسیرها در نگاره ۴ آمده است:

## نگاره ۴. تعیین بحرانیت مسیرها

زمان‌ها	مسیر (۱-۲-۴)	مسیر (۱-۳-۴)
۱۰	$0.24 \times 0.1 = 0.024$	$0.18 \times 0.76 = 0.1368$
۱۱	$0.52 \times 0.28 = 0.1456$	$0.72 \times 1 = 0.72$
۱۲	$0.24 \times 1 = 0.24$	
CP	$0.4096$	$0.8568$
Normalized (CP): $(0.4096)/(0.4096+0.8568)=0.323$		$(0.8568)/(0.4096+0.8568)=0.677$

همان گونه که از جدول فوق مشخص است، مجموع فراوانی‌های تجمعی (CP) از یک بزرگ‌تر است ( $1/2664 = 0.4096 + 0.8568$ )، زیرا وقتی که زمان انجام هر دو مسیر برابر ۱۱ و یا ۱۲ است هر دو زمان بحرانی‌اند. با استاندارد کردن معیار بحرانیت‌ها جمع بحرانیت مسیرها را به یک تبدیل می‌کنیم.

همان گونه که در جدول مشخص است، بحرانیت مسیر (۱-۳-۴) از دو برابر بحرانیت مسیر (۱-۲-۴) بیش‌تر است. در حالی که به روش پرت مسیر (۱-۲-۴) به عنوان مسیر بحرانی تعیین می‌گردد. دلیل این موضوع این است که در روش پرت تنها از میانگین زمان انجام فعالیت‌ها برای تعیین زمان تکمیل پروژه و مسیر بحرانی استفاده می‌شود و عنصر تصادفی که واریانس زمان انجام هر فعالیت است در تعیین زمان تکمیل و مسیر بحرانی در نظر گرفته نمی‌شود. این مثال بیان می‌کند که مفهوم معیار بحرانیت برای هر فعالیت در مدل‌های تصادفی خیلی با ارزش‌تر از مفهوم معیار بحرانیت برای هر مسیر است. خصوصاً به این دلیل که مسیر بحرانی محاسبه شده به روش پرت لزوماً محتمل‌ترین مسیر بحرانی نیست.

## نتیجه‌گیری

روش پرت دارای نواقصی است که باعث می‌شود زمان تکمیل پروژه کمتر از زمان واقعی آن تخمین زده شود. این امر ناشی از فرض‌های غیر واقعی است که به منظور ساده کردن محاسبات اعمال می‌شود. استفاده از تابع توزیع احتمال با تکیه بر مفهوم معیار بحرانیت روش‌هایی را برای برطرف نمودن نارسایی‌های روش پرت ارائه می‌کند. براساس روش جامع پیشنهادی، معیار بحرانیت برای هر فعالیت در مدل‌های تصادفی خیلی با ارزش‌تر از مفهوم معیار بحرانیت برای هر مسیر است، خصوصاً به این دلیل که مسیر بحرانی محاسبه شده به روش پرت لزوماً محتمل‌ترین مسیر بحرانی نیست.

## منابع

- ذهبی، اشکان (۱۳۷۸). تهیه و تدوین نرم افزار جهت تعیین زمان و تکمیل پروژه و معیارهای بحرانیت با استفاده از الگوریتم جدید. رساله کارشناسی ارشد، دانشگاه شیراز.
- سوخکیان، محمدعلی (۱۳۷۲). «روش عمومی برای ارزیابی زمان تکمیل پروژه و معیارهای بحرانیت در شبکه‌های پرت». تهران، اولین کنگره ملی مهندسی صنایع و بهره‌وری.
- Chapman, C. B. and D. F. Cooper (1983). "Risk Engineering: Basic Controlled Interval and Memory Models." *Journal of the Operational Research Society*. 34/1, 51-60.
- Dodin B. M. and S. E. Almaghraby, (1985). "Approximating the Criticality Indices of the Activities in PERT Networks." *Management Science*, 31, 207-223.
- Garman, M. B. (1972). "More on Conditioned Sampling in the Simulation of Stochastic Networks." *Management Science*. 19, 90-95.
- Kamburowski, J. (1985). "Normally Distribution Activity Durations in PERT Networks." *Journal of OR Society*. 36, 1051-1057.
- Kaplan, S. (1981). On the Method of Discrete Probability Distributions in Risk and Reliability Calculation-Application Assessment. *Risk Analysis* 1(3).
- Kleindorfer, G. B. and P. R. Kleindorfer (1974). "Bounding Distributions for Stochastic Logic Networks." *Operational Research. Qual.* 25, 465-479.
- Ringer, L. J. (1971). "A Statical Theory for PERT in Which Completion Time of Activities are Inter-Dependent." *Management Science*. 17, 717-723.
- Soukhakian, M. A. (1998). *A Generalized Algorithm to Evaluate Project Completion Times and Criticality Indices for PERT Networks*. Unpublished Ph. D. Thesis, University of Southampton.