«دانش مدیریت»
سال سیزدهم - شماره ۵۱ - زمستان ۱۳۷۹
ص ص ۱۲۰ - ۱۱۱

بسط نظریه کلاسیک موجودی EOQ

محمد باقر فخرزاد [۱]

چکیده مقاله

در این مطالعه به بسط نظریه کلاسیک EOQ بر اساس تقسیم بندی اقلام انباری به اقلام پر تحرک و کم تحرک و با در نظر گرفتن ذخیره اطمینان مورد نیاز پرداخته شده است. فرضیات اساسی مدل EOQ بازنگری و مورد دقت نظر قرار گرفته و تعدیلات لازمه در این خصوص جهت بسط این نظریه به عمل آمده است. بدین ترتیب مقدار سفارش انجام شده در سیستم بر اساس حداکثر و حداقل مقدار سفارش اقتصادی تعدیل می‌گردد. در مدل پیشنهادی در عین ثابت نگهداشتن سطح بالای خدمت دهی و ذخیره اطمینان، هزینه سفارش (بر اساس تقسیم‌بندی اقلام) کاهش یافته و تعیین مقدار سفارش بر اساس نیاز واقعی امکان‌پذیر می‌گردد.

واژه‌های کلیدی

مدیریت عملیات - نظریه E.O.Q - اقلام انباری - کنترل موجودی - سفارش اقتصادی.

مقدمه

مدل EOQ که اولین بار توسط هریس در سال ۱۹۱۵ میلادی استنتاج شد هم اینک در

۱- عضو هیأت علمی دانشکده صنایع دانشگاه یزد

اکثر کتاب‌های مدیریت عملیات مورد بحث و بررسی قرار گرفته است. فرمول آن بسیار ساده بوده و به دلیل فرضیات ساده کننده آن، نمی‌توان کورکورانه آن را در مسایل واقعی بکار بست. این مقاله سعی در بسط این فرمول به منظور افزایش کارایی آن دارد.

مسایل کنترل موجودی در سه دهه گذشته به شکل گسترده‌ای در ادبیات مدیریت عملیات و دانش مدیریت مطالعه شده است. بررسی‌های اخیر نمایانگر آن است که طی دو سال گذشته مقالات پژوهشی در زمینه کنترل موجودی، ۲۲ درصد عناوین چهار ژورنال معتبر که مرتبط با موضوعات مدیریت عملیات می‌باشند را تشکیل داده است. علیرغم آن که تعداد زیادی از این مقالات به معرفی روش‌ها و تکنیک‌های بهبود کنترل موجودی می‌پردازند مسائل جهان واقعی امروز همچنان نیازمند توجه بیشتر پژوهشگرانی است که سعی در کاهش شکاف میان جامعه علمی و عملی دارند.

تعریف مسأله

مدل EOQ یک مدل ایستا بوده و در مقابل اقلام پرتحرک عکس‌المعل مناسبی از خود نشان نمی‌دهد؛ لذا با اعمال تغییراتی در این مدل، توانمندی آن تقویت می‌گردد.

بررسی فرمول اولیه مقدار سفارش اقتصادی

قبل از بسط فرمول مقدار سفارش اقتصادی، ابتدا به شرح اولیه این فرمول می‌پردازیم:

$$T.I.C^{1} = \frac{4BC}{Q} + U\,(I + A)\,\frac{Q}{2} \qquad (۱)$$

به طوری که:

B = هزینه صدور هر سفارش

4C = مصرف ۴ فصل یا مصرف سالیانه

Q = مقدار هر سفارش

1- Total Inventory Cost

U = قیمت هر واحد کالا

I = نرخ بهره سالیانه بر حسب درصد یا حداقل نرخ برگشتی قابل قبول [1] (MARR)

A = هزینه نگهداری سالیانه بر حسب درصد (بر اساس درصدی از کل موجودی انبار)

در صورتی که از فرمول شماره (۱) نسبت به Q مشتق گرفته و مساوی صفر قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$Q^* = \sqrt{\frac{8B}{(I+A)}} \quad \sqrt{\frac{C}{U}} \qquad (۲)$$

در این صورت هزینه بهینه کل موجودی برابر است با:

$$T.I.C^* = \sqrt{8BC\,[U(I+A)]} \qquad (۳)$$

جهت خلاصه نمودن فرمول شماره (۲) می‌توان رابطه

$$\sqrt{\frac{8B}{(I+A)}}$$

را به صورت یک عدد ثابت تعریف نموده و در فرمول جایگزین کرد؛ چراکه مقدار B (هزینه صدور هر سفارش) را می‌توان به صورت میانگین جهت یک گروه از کالاهای سفارشی در نظر گرفت. مقدار I (نرخ بهره سالیانه) به صورت سالیانه ثابت فرض شده است.

مقدار A یا هزینه نگهداری سالیانه بر اساس درصدی از کل موجودی انبار به صورت ثابت و سالیانه محاسبه گردیده است. بنابر این در صورتی که رابطه فوق‌الذکر را برابر K قلمداد نماییم، مقدار سفارش اقتصادی کالا بدین نحو اصلاح می‌گردد:

$$Q^* = K\sqrt{\frac{C}{U}}$$

بدین ترتیب مقدار ثابت K بر اساس گروه‌های مختلف کالا و یا نوع سفارش (داخلی یا خارجی) به طور قابل ملاحظه‌ای متفاوت می‌باشد. بر این اساس می‌توان کالاها را در گروه‌های مختلف به نحوی طبقه‌بندی کرد که هزینه‌های سفارش و نگهداری آنها با یکدیگر برابر باشد و این خود یکی از خواص بسیار مفید و قابل استفاده در مبحث مقدار سفارش اقتصادی است. از جهت دیگر با استفاده از تسهیلات فاکتور K ، مدیریت می‌تواند به طور مؤثری راجع به افزایش یاکاهش موجودی جهت یک دامنه وسیع کالا قضاوت نماید. به

1- Minimum Atractive Rate of Return

عبارت دیگر با افزایش و یا کاهش فاکتور K، مقدار سفارش اقتصادی تحت تأثیر قرار می‌گیرد.

اقلام پرتحرک و کم‌تحرک

به اقلامی پرتحرک اطلاق می‌شود که در یک فاصله زمانی ۱۲ ماهه متوالی، حداقل در چهار ماه از انبار سابقه صدور داشته باشد؛ در غیر این صورت آن قلم کالا را کم‌تحرک عنوان خواهیم نمود. در یک سیستم کنترل موجودی حدود ۸۰ درصد تحرکات و جابجایی در موجودی یک انبار مربوط به ۲۰ درصد اقلام انبار است. به عبارت دیگر حدود ۲۰ درصد اقلام انبار پرتحرک و مابقی کم‌تحرک هستند.

اقلام پرتحرک با گذشت زمان ممکن است کم‌تحرک شوند و بالعکس. بعضی اقلام ممکن است در زمان مرور وضعیت ماهانه از روش «حداقل / حداکثر (موجودی + بین راهی)» به روش فرمول سفارش اقتصادی تغییر وضعیت پیدا نمایند. باید توجه داشت که نحوه سفارش اقلام پرتحرک بر اساس مقدار سفارش اقتصادی صورت گرفته و نحوه سفارش اقلام کم‌تحرک بر اساس روش حداقل / حداکثر (موجودی + بین راهی) صورت می‌گیرد. بنابر این مرور ماهیانه و سالیانه وضعیت موجودی یک امر مهم و اساسی بوده تا بر این اساس نسبت به عملیات انجام شده در کنترل موجودی اطمینان لازمه حاصل گردد و از بروز این حالت که تعداد زیادی از اقلام کم‌تحرک در گوشه‌ای مانده و اقدام مقتضی جهت تحرک آنها و یا از رده خارج نمودن آنها صورت نگرفته، جلوگیری شود.

توسعه مدل

همانطور که قبلاً بیان گردید در مدل ایجاد شده:

$$Q^* = K\sqrt{\frac{C}{U}}$$

پارامتر K یک عدد ثابت بوده و بر اساس نوع طبقه‌بندی کالاها و یا نوع سفارش کالا (داخلی یا خارجی) می‌تواند متفاوت باشد. بر این اساس دو پارامتر دیگر یعنی C (مصرف فصلی یا سه ماهه) و U (قیمت هر واحد کالا) می‌تواند بسیار تعیین کننده باشد. یعنی در

صورت افزایش یا کاهش مقدار مصرف ماهانه کالا با در نظر گرفتن قیمت هر واحد کالا به صورت ثابت و یا بالعکس، مقدار سفارش می‌تواند به میزان زیادی تحت تأثیر قرار گیرد. بر این اساس با بسط و تعدیل مدل به حداقل و حداکثر مقدار یعنی Min Q* و Max Q* مقدار آن را محدود کرده و کارآیی و توانایی مدل را افزایش می‌دهیم. جهت ثابت نگهداشتن سطح خدمت دهی، موجودی ذخیره را بر اساس ماه مصرف به عنوان یک پارامتر مهم در مدل، تأثیر خواهیم داد بنابر این خواهیم داشت:

$$T.I.C = \frac{4BC}{Q} + U(I+A)(\frac{Q}{2}+R)$$

به طوری که:

R = موجودی ذخیره بر حسب ماه

جهت بهینه‌سازی مدل می‌توان نوشت:

$$\frac{4BC}{Q} = U(I+A)(\frac{Q}{2}+R)$$

طرفین رابطه را در 2Q ضرب کرده و سپس بر U(I+A) تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{8BC}{U(I+A)} = \frac{U(I+A)(Q^2+2QR)}{U(I+A)}$$

همان طور که ملاحظه می‌شود مقدار 8BC / U(I+A) برابر مقدار $(Q^*)^2$ می‌باشد، لذا داریم:

$$Q^{*2} = Q^2 + 2QR$$

$$Q^2 + 2QR - Q^{*2} = 0$$

$$Q = \sqrt{R^2 + Q^{*2}} - R \qquad (1)$$

حال چنانچه مقدار حداقل هر سفارش (Q) را برابر ۳ ماه مصرف (زمان تدارک یک قلم کالا) قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$\sqrt{R^2 + Q^{*2}} - R = 3$$

$$R^2 + Q^{*2} = (R + 3)^2$$

$$R^2 + Q^{*2} = R^2 + 6R + 9$$

$$Q^{*2} = 6R + 9$$

$$Q^{*} = \sqrt{6R + 9}$$

و بدین ترتیب با ضرب میانگین مصرف ماهیانه در مقدار $\sqrt{6R + 9}$ می‌توان حداقل مقدار سفارش را محاسبه نمود:

$$\text{Min } Q^{*} = F\sqrt{6R + 9}$$

به طوری که:

F = میانگین مصرف ماهیانه

جهت محاسبه حداکثر مقدار سفارش اقتصادی، رابطه (۱) را برابر ۱۲ ماه قرار می‌دهیم. یعنی:

$$\sqrt{R^2 + Q^{*2}} - R = 12$$

$$R^2 + Q^{*2} = (R + 12)^2$$

$$R^2 + Q^{*2} = R^2 + 24R + 144$$

$$Q^{*2} = 24R + 144$$

$$Q^{*2} = 2\sqrt{6R + 36}$$

و با ضرب میانگین مصرف ماهیانه در مقدار

$$2\sqrt{6R + 36}$$

حداکثر مقدار سفارش اقتصادی را می‌توان بدین نحو محاسبه کرد:

$$\text{Max } Q^{*} = 2F\sqrt{6R + 36}$$

مراحل انجام کار

۱- کلیه اقلام کم‌تحرک از مدل حداقل / حداکثر (موجودی + بین راهی) جهت تعیین مقدار سفارش خود استفاده می‌کنند.

۲- کلیه اقلام پرتحرک از مدل مقدار سفارش اقتصادی (EOQ) جهت تعیین مقدار سفارش خود استفاده می‌کنند.

$$Q^{*} = K\sqrt{\frac{C}{U}}$$

۳- هنگامی که مقدار سفارش اقتصادی (بند ۱) از حداقل فرمول تعریف شده زیر کمتر باشد، به این حداقل تعدیل می‌گردد:

$$\text{Min } Q^* = F\,(6R + 9)^{1/2}$$

یعنی اینکه مقدار سفارش اقتصادی (بند ۱) به مقدار فرمول بالا افزایش پیدا می‌کند.

۴- هنگامی که مقدار سفارش از حداکثر فرمول تعریف شده زیر بیشتر باشد، به این حداکثر تعدیل می‌گردد:

$$\text{Max } Q^* = 2F\,(6R + 36)^{1/2}$$

یعنی این که مقدار سفارش اقتصادی به مقدار فرمول بالا تقلیل پیدا می‌کند.

۵- در صورتی که مقدار سفارش اقتصادی بدست آمده و مقدار حداکثر سفارش اقتصادی هر دو بزرگتر از ۱۲ ماه مصرف باشند، در این صورت به نحو ذیل تعدیل می‌گردند:

$$Q^*_m = [(\text{Max } Q^*)^2 + (\text{موجودی ذخیره بر حسب مقدار})^2]^{1/2}$$

۶- نتیجه بندهای ۲، ۳، ۴ و ۵ به نزدیکترین ضریب سفارش تعدیل می‌گردد.

چند مثال عملی

۱- موجودی ذخیره (ماه) = 2 ضریب مقدار سفارش = 30 $C = 7.2$ $U = 540$ $K = 340$

$$Q^* = K\sqrt{\frac{C}{U}} = 340\sqrt{\frac{7.2}{540}} = 39.25$$

$$\text{Min } Q^* = \frac{7.2}{3}\sqrt{(6 \times 2) + 9} = 10.99 < 39.25$$

$$\text{Max } Q^* = \frac{2 \times 7.2}{3}\sqrt{(6 \times 2) + 36} = 33.25 < 39.25$$

مقدار E.O.Q = ۳۳ در برگه سفارشات درج می‌شود که مقدار مزبور با توجه به ضریب مقدار سفارش به مقدار ۳۰ گرد می‌شود.

۲- موجودی ذخیره (ماه) = 2 U = 62

ضریب مقدار سفارش = 1 C = 58.5 K = 340

$$Q^* = 340\sqrt{\frac{58.5}{62}} = 330$$

$$\text{Min } Q^* = \frac{58.5}{3}\sqrt{(6\times 2) + 9} = 89.36 < 330$$

$$\text{Max } Q^* = \frac{2\times 58.5}{3}\sqrt{(6\times 2) + 36} = 270 < 330$$

همانطور که مشاهده می‌شود مقدار ۳۳۰ بزرگتر از ۱۲ ماه مصرف می‌باشد. از طرف دیگر چون مقدار ۲۷۰ از مصرف ۱۲ ماه کمتر می‌باشد، مقدار ۲۷۰ روی برگه سفارشات درج می‌شود و چون ضریب سفارش ۱ می‌باشد لذا همان عدد ۲۷۰ مجدداً درج می‌گردد.

۳- موجودی ذخیره (ماه) = 2 مقدار ذخیره عادی = 50 U = 7

ضریب مقدار سفارش = 1 C = 75 K = 340

$$Q^* = 340\sqrt{\frac{75}{7}} = 1112.9$$

$$\text{Min } Q^* = \frac{75}{3}\sqrt{(6\times 2) + 9} = 115 < 1112.9$$

$$\text{Max } Q^* = \frac{2\times 75}{3}\sqrt{(6\times 2) + 36} = 346.4 < 1112.9$$

$$Q^*_m = \sqrt{(346.4)^2 + (50)^2} - 50 = 300$$

همانطور که مشاهده می‌گردد مقدار ۳۴۶/۴ و مقدار ۱۱۱۲/۹ هر دو بزرگتر از مصرف ۱۲

ماه می‌باشد. (مصرف ۱۲ ماه برابر با ۳۰۰ = ۴ × ۷۵ می‌باشد) بدین لحاظ مقدار Q^*_m برابر ۳۰۰ در برگه سفارشات درج خواهد شد.

نتیجه گیری

با بسط نظریه کلاسیک موجودی E.O.Q که در رابطه با اقلام پرتحرک بیان گردید، می‌توان کارایی و قابلیت مدل مذکور را افزایش داد. در این مقاله ابتدا به بررسی فرمول اولیه مقدار سفارش اقتصادی پرداخته، آن را بر اساس گروه‌های مختلف کالا و یا نوع سفارش بیان کرده و سپس اقدام به بسط مدل شد. در نتیجه مقدار سفارش اقتصادی بر اساس مراحل انجام کار مورد تعدیل و تجدید نظر قرار گرفت.

منابع و مآخذ

1- Austin. L. M., "Project EOQ: A Success Story in Implementing Academic Research." **Interfaces**. Vol. 7. No. 4 (August 1977). pp. 1-12.

2- Buffa. E. S., " Research in Operations Management. "**Journal of Operations Management**. Vol. l. No. l (1980). pp. 1-7.

3- Chase. R. B., " A Classification and Evaluation of Research in Operations Management." **Journal of Operations Management.** Vol. l. No. l (1980). pp. 9-14.

4- Gardner. E. S., Jr.," Inventory Theory and the Gods of Olympus." **Interfaces**. Vol. 10. No. 4 (August 1980). pp. 42-45.

5- Gross. D., Harris. C. M., and Robers. P. D.,"Bridging the Gap Between Mathematical Inventory Theory and Construction of a Workable Model", **International Journal of Production Research.**, Vol. 10. No. 3 (1972). pp. 201-214.

6- Harris. F., **Operations and Cost Factory Management Series.** A. W. Shaw Co., Chicago. 1915.

7- Jaikumar. R. and Ran. U. R.,"An On Line Integrated Materials Management

System." **Interfaces**. Vol. 7. No. 1. Part 2 (November 1976). pp.19-30.

8- Laurence. M. J.,"An Integrated Inventory Control System." **Interfaces**. Vol. 7. No. 2 (February 1977). pp. 55-62.

9- Liberatore. M. J.,"Using MRP and EOQ Safety Stock for Raw Materials Inventory Control: Discussion and Case Study." **Interfaces.** Vol. 9. No. 2. Part 1 (February 1979). pp. 1-6.