

## توسعه فراکتالی در سیستم‌های پویا و تحول در سیستم‌های سازمانمند

دکتر نظام‌الدین فقیه<sup>۱</sup>

### چکیده مقاله

این مقاله با پژوهش در نظریه توسعه و رشد برخه‌ای (فراکتالی) در سیستم‌های پویا، چگونگی رشد و تحول را در سیستم‌های طبیعی، سازواره‌ها و تشکیلات بفرنج، مورد مطالعه و بررسی قرار می‌دهد. سیستم‌های انسانی و مدیریتی نیز معمولاً، همچون سازواره‌ها و سیستم‌های طبیعی، تشکیلاتی سازمانمند و بفرنج با اوصاف حیاتی و خصلت‌های رشد و توسعه، محسوب می‌گردند. از اینرو بهره‌جویی از مدلسازی در فضای برخه‌ای، می‌تواند ابزاری توانمند را برای پژوهش‌های مدیریت و سنجه‌های کمی درخوری را برای ارزیابی و مقایسه فرآیندهای کیفی، رشد و توسعه، استحکام و انسجام سازمانی و ضرورت‌های تصمیم‌گیری، تأمین نماید. لذا، ابتدا نظریه فراکتال، چگونگی ایجاد پدیده‌های فراکتالی و مفهوم ابعاد خودهمانندی در فضای برخه‌ای، از نظر می‌گذرد. سپس فراکتال‌های تصادفی و

نامنتظم، نحوه پیدایش آنها، ارتباط ابعاد برخه‌ای با فرایندهای تصادفی و توابع چگالی طیفی، مفاهیم خود همانندی آماری و خودخویشی (خود خویشاوندی)، مورد ملاحظه قرار می‌گیرد. آنگاه، توسعه و رشد فراکتالی، سیستم‌های لیندنامیر و نحوه رشد و تحول در سیستم‌های طبیعی، الگوهای ریاضی تواندار مانند پدیده‌های رشد آلومتریک، روش تعیین ابعاد فراکتالی در سازواره‌ها و سیستم‌های سازمانمند و بغرنج، مورد بررسی قرار می‌گیرد و استفاده از آن در توضیح و تفسیر پدیده‌های دگرگونی و تحول تبیین می‌گردد.

## واژه‌های کلیدی

رشد برخه‌ای - فراکتال‌های تصادفی و نامنتظم - فرایندهای تصادفی - سیستم‌های پویا - مدل‌سازی - شبیه‌سازی.

## مقدمه

پدیده رشد برخه‌ای (فراکتالی)<sup>۱</sup> و به کارگیری آن در گشایش رموز فرایندهای تحول و توسعه در سیستم‌های پویا، به عنوان دست‌آوردی شگرف و واپسین در معارف بشر، لبه پیشرو و بران مرزهای پویای دانش را تشکیل می‌دهد. (۱) این واقعیت، بویژه از آن جهت نیز، اهمیتی مضاعف می‌یابد که غالباً، فراخنای آشوب<sup>۲</sup> و فضای هندسی تحولات آشوبناک، از ماهیت و ابعاد فراکتالی برخوردار است؛ (۲ و ۳) و اخیراً، موضوع آشوب در سیستم‌های پویا، به نوبه خود، منزلت پژوهشی وسیع و رفیعی را در عرصه‌های مختلف علمی احراز نموده است. (۴ - ۱۰) در واقع، آنگاه که فرآیند توسعه، در گذر زمان مطرح باشد، نظریه آشوب، پای در عرصه تحلیل می‌نهد و هنگامی که شکل و شمایل ساختاری رشد و تحول، در فرایندهای آشوبناک، مطمح نظر قرار گیرد، هندسه فراکتالی، رخ می‌نماید؛ و این، در حقیقت، هندسه‌ای است که ساختارهای آن به آشوب، نظم می‌بخشد. (۱۱ و ۱۲) به عبارتی، فضای فراکتالی،

۱ - واژه Fractal را «برخال» نیز گفته‌اند.

همچون «زبانی» نوین، در توصیف، مدل‌سازی و تحلیل تشکلهای بفرنج به کار می‌آید؛ لیکن در «زبان سنتی» که براساس فضای اقلیدسی مبتنی است، اجزاء و اشکال، مانند خط، دایره و کره، کاملاً مرئی و آشنا هستند؛ حال آن‌که عناصر زبان جدید، تن به مشاهده مستقیم و ظاهری نمی‌سپارند. این زبان نوپا، عموماً متشکل از الگوریتم‌هایی است که توسط رایانه‌ها، به اشکال، ساختارها و شمایل منتظم، تبدیل می‌شوند؛ و از آنجا که گنجینه وسیعی از الگوریتم‌ها و روش‌های محاسباتی را دربرمی‌گیرد، از گنجایش لازم برای در اختیار نهادن ابزار تحلیلی توانمندی برخوردار است. (۱۳ و ۱۴)

تعداد ابعاد فضا، در هندسه اقلیدسی، همواره عددی صحیح و غیراعشاری است؛ اما در فضای برخه‌ای یا فراکتالی، می‌تواند عددی غیرصحیح و اعشاری باشد. (۱۵ و ۱۶) مطالعه پدیده‌های برخوردار از فضای ابعادی برخه‌مند، در سال‌های اخیر، با اقبال شایان توجهی مواجه بوده و عرصه‌های گوناگونی از فرآیندهای فیزیکی، فنی و زیستی را در بر گرفته است. (۱۷ - ۲۳) بویژه، بسیاری از فرآیندها و موجودات طبیعی، از خواص لازم برای توصیف و مدل‌بندی در فضای فراکتالی برخوردار هستند؛ مانند درختان، کوه‌ها، ابرها، خوشه‌ها، کهکشان‌ها، توده‌های میکروسکوپی، توده‌های شن، کناره‌ها و ساحل‌ها. (۲۴ - ۲۸) همچنین در مواردی، نظریه فراکتال‌ها برای تبیین و توصیف پدیده رشد، به کار گرفته شده است. (۲۹-۳۱)

در روانشناسی و علوم رفتاری هم کوشش‌هایی برای بهره‌گیری از نظریه فراکتال، در تدوین مدل‌های کمی رشد و توسعه، به عمل آمده است. (۳۲ - ۳۴) به این ترتیب، در سیستم‌های سازمانی و مدیریتی و پژوهش‌های مرتبط با آن نیز، نظریه فراکتال می‌تواند به کار آید؛ بویژه آنکه با توجه به وجود ساختارهای اتلافی،<sup>۱</sup> پدیدارهای آشوب در اینگونه سیستم‌ها، امری محقق است؛ (۳۵ - ۳۸) و چنانکه پیش از این گفته شد، فضای پیدایش آشوب از ابعادی برخه‌مند برخوردار تواند بود.

بنابراین، ابتدا می‌باید نظریه فراکتال در فضای برخه‌ای، و مفاهیم مرتبط با آن را از نظر

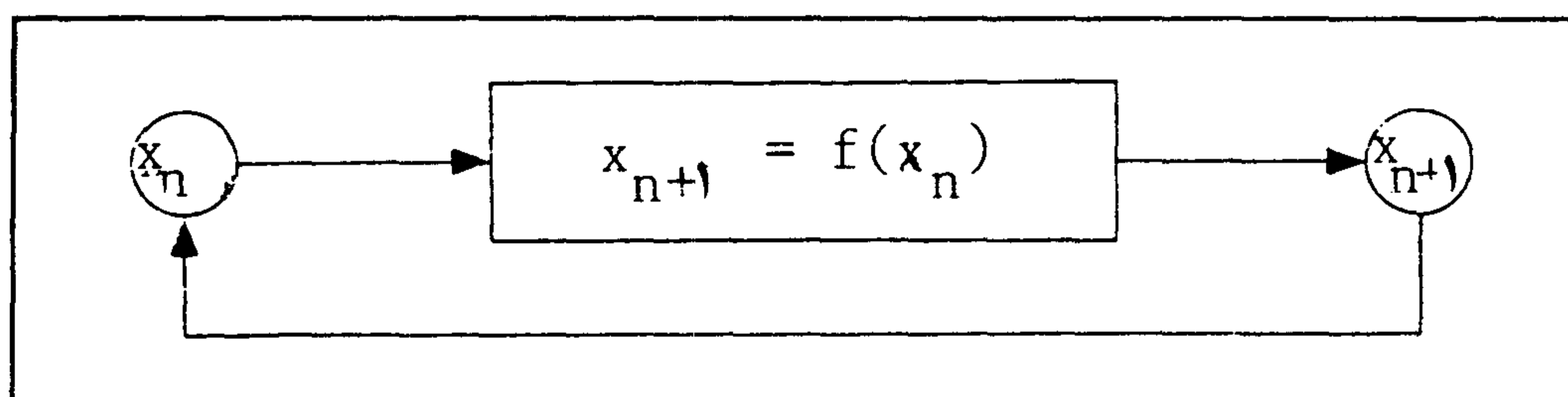
گذرانید.

## نظریه فراکتال

برای ملاحظه نظریه فراکتال، مناسب است که به فرآیند تکرر (په مندی) در فضا، نظر افکنده شود. تکرر، فرآیندی را تشکیل می‌دهد که چونان سیستمی، برونداد خود را بازخور می‌نماید و آن را به مثابه درونداد تحویل می‌گیرد تا بروندادی جدید، پس دهد. (۳۹) این پدیده، به عنوان یک سیستم بازخور (فیدبک)، در شکل شماره ۱ نمایش داده شده است و می‌تواند طبق رابطه زیر بیان گردد:

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad (1)$$

در رابطه (۱)، تابع  $f(x)$  می‌تواند انواع و اشکال ریاضی متفاوت داشته باشد؛ و از یک تابع بسیار ساده مضاعف (که با شروع از یک مقدار اولیه  $x_0$ ، هر بار حاصل را دو برابر نماید) گرفته، تا پیچیده‌ترین توابع را دربرمی‌گیرد. برای مشاهده روند هندسی کارکرد چنین رابطه‌ای، و به عنوان یک مثال ساده، می‌توان پاره‌خطی را به طول دلخواه در نظر گرفته و آنرا به سه قسمت مساوی تقسیم نمود؛ قسمت میانی را برداشته و دو انتهای قسمت خالی باقیمانده را توسط دو قسمت که طول هر کدام یک سوم پاره خط اولیه است، مانند یک مثلث متساوی‌الاضلاع، به هم پیوند زد.



شکل شماره ۱ - نمایش فرآیند تکرر در سیستم بازخوران

آنگاه، می‌توان این فرآیند (تابع) را به صورت پیاپی، تکرار نمود (تقسیم هر پاره خط به سه

قسمت مساوی، برداشتن قسمت میانی، پیوند دو انتهای قسمت خالی توسط دو پاره خط که طول هر کدام یک سوم پاره خط تقسیم شده است). چنانچه این فرآیند بارها و بارها تکرار شود، تصویر نشان داده شده در بالای شکل شماره ۲، بدست می‌آید. همین فرآیند را می‌توان به این طریق نیز به تکرر سپرد که هر بار، بر روی قسمت میانی، مربعی بنا نهاده شود؛ در این صورت، پس از بارها تکرار، تصویری حاصل می‌گردد که در پایین شکل شماره ۲، نمایش داده شده است. حتی، اگر بجای آنکه پاره خط اولیه به سه قسمت مساوی تقسیم شود، به چهار پاره خط مساوی تقسیم و بر روی هر یک از دو قسمت میانی، مربعی در دو جهت معکوس بنا شده، دو پاره خط میانی را برداشته و آنگاه، فرآیند عیناً و مکرراً، تکرار شود، تصویر وسط، در شکل شماره ۲، نتیجه می‌گردد.

هر یک از فرآیندهای فوق‌الذکر نشانگر آن است که چگونه قاعده‌ای بسیار ساده، تحت عمل تکرر، می‌تواند به تصاویری بغرنج با خواصی غیر معمولی، منجر شود. در هر شکل، مشابهت و همانندی بین قطعات متعدد تشکیل دهنده آن شکل و نیز کل شکل، کاملاً جالب توجه است؛ هر قطعه یا هر جزء متشکله و نیز مجموعه آنها، همشکل و از گونه یکدیگرند؛ و در صورت بزرگنمایی، هر قطعه می‌تواند کل شکل را وانمایاند. این خاصیت به «خود همانندی» (خودگونگی)<sup>۱</sup> موسوم است؛ در واقع خود همانندی یا خودگونگی، خاصیتی را بیان می‌دارد که طبق آن، زیر مجموعه‌ها، در صورت درشتنمایی (و مثلاً قرار گرفتن در زیر ذره‌بین و یا دستگاه ریزبین)، عیناً مشابه، همسان و همگون با یکدیگر و نیز با کل مجموعه، جلوه‌گر می‌شوند. (۴۰ و ۴۱) این خاصیت، از ویژگی‌های هندسه برخه‌ای (فراکتالی) است و برخه‌مندان (فراکتال‌ها) را از اشکال هندسه سنتی (اقلیدسی) متمایز می‌نماید؛ زیرا در فضای اقلیدسی، عموماً، بزرگنمایی می‌تواند موجب هموار نمودن نمونه بیشتری گردد. به این لحاظ، شکل‌های فراکتالی، تحت تغییر مقیاس، پایا و ناوردا تلقی می‌گردند. مضافاً، در هر بار تکرار الگوریتم‌ها، شکل فراکتالی ازدیاد طول حاصل می‌نماید و در حدّ (بی‌نهایت تکرر و پویه‌گری)، منحنی حاصل، با طولی نامحدود (بی‌نهایت)، در گستره‌ای محدود، انباشته

می‌شود؛ بدون آنکه این منحنی، خود را قطع کند. (۴۲ و ۴۳)

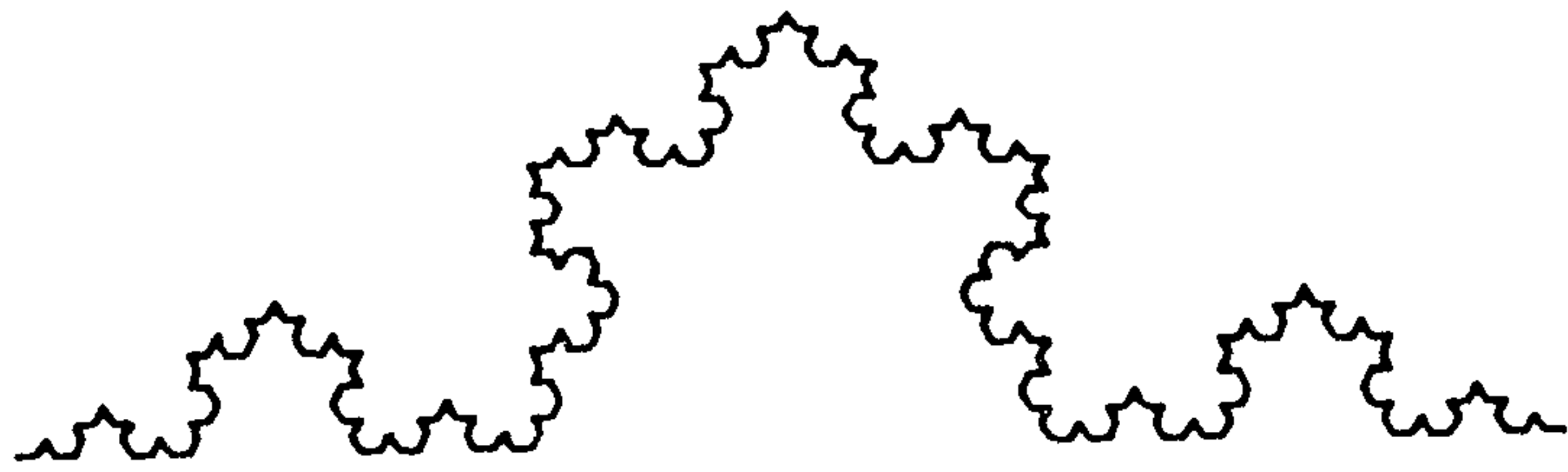
موضوع خود همانندی یا خودگونگی که همانا پایایی در مقیاس را بیان می‌دارد، از مفاهیم بنیادی در هندسه فراکتالی است و با مفهوم ابعاد فضا، ارتباطی تنگاتنگ دارد. (۴۴) یک پاره

جایگزین توسط:

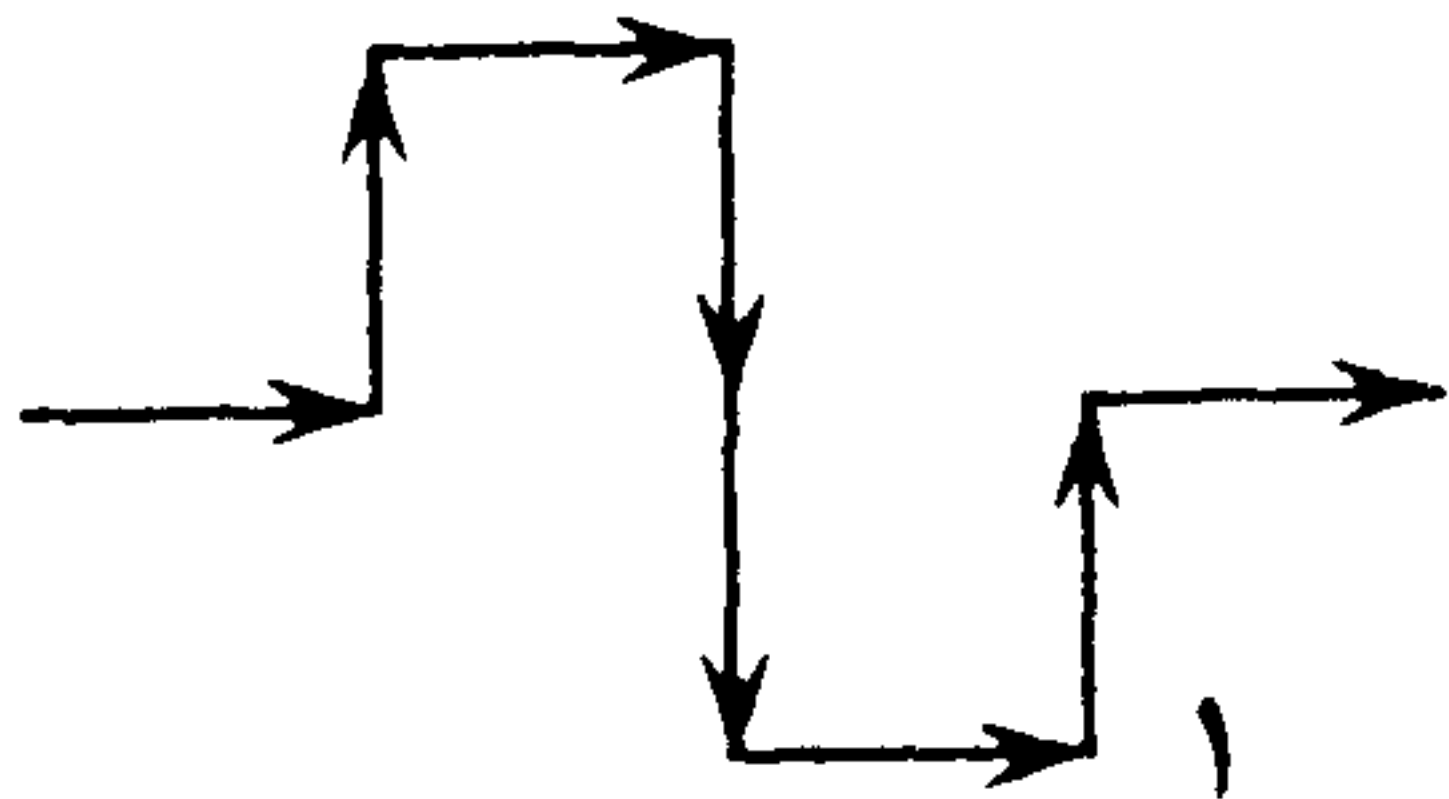


$$N = 4 \quad r = \frac{1}{3}$$

$$D = \log(4) / \log(3) = 1.26 \dots$$

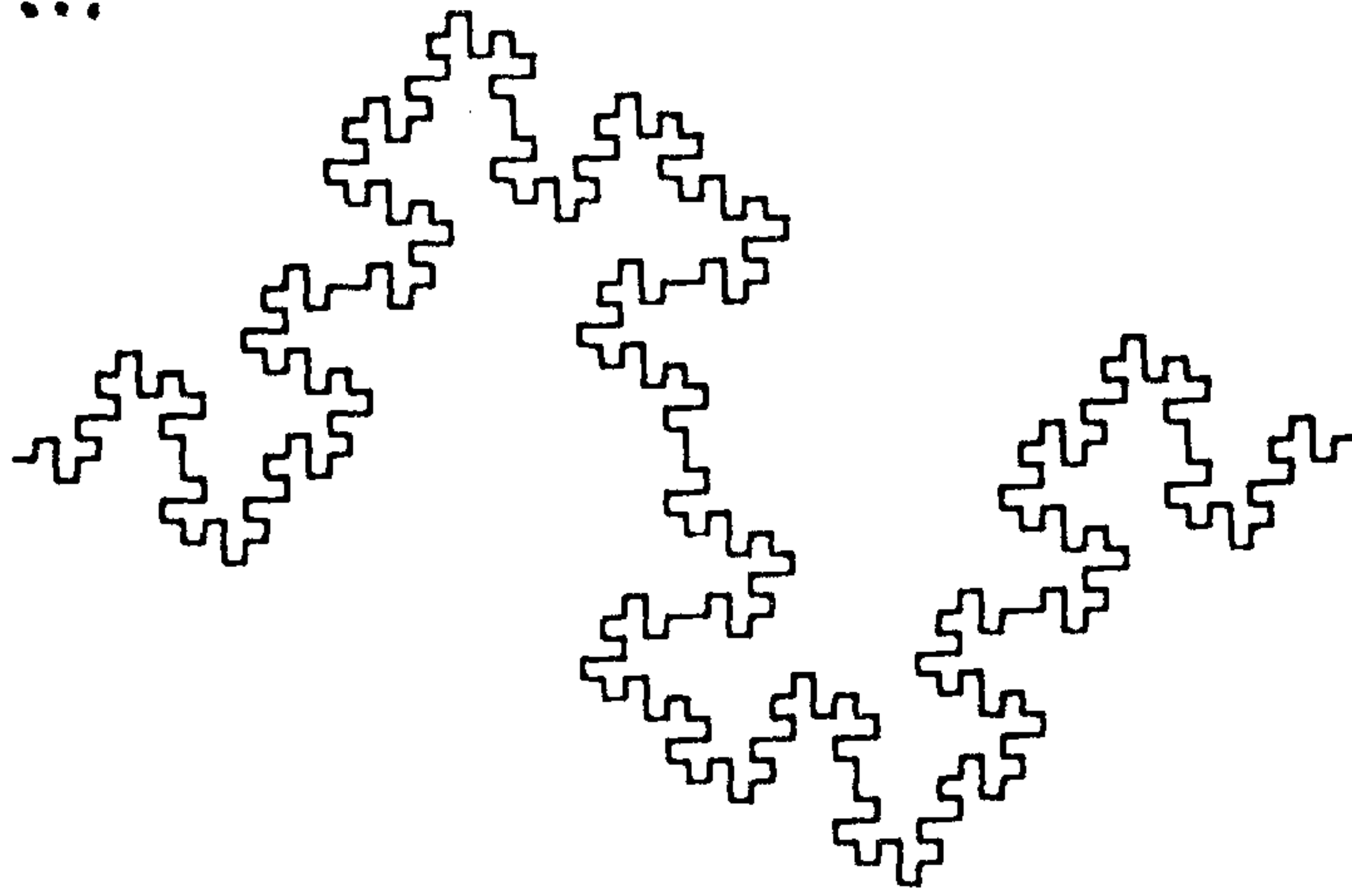


الف

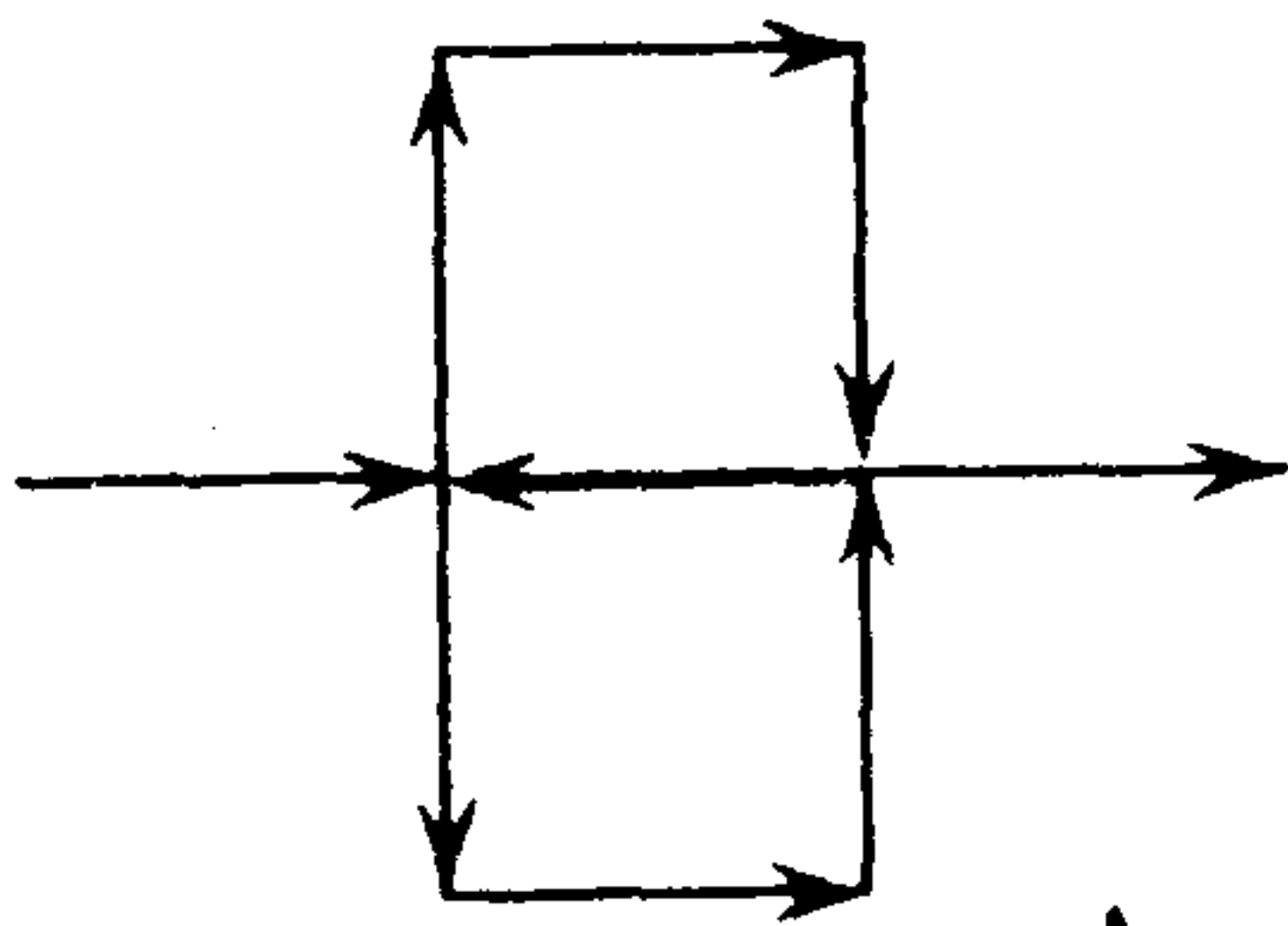


$$N = 8 \quad r = \frac{1}{4}$$

$$D = \log(8) / \log(4) = 1.5$$

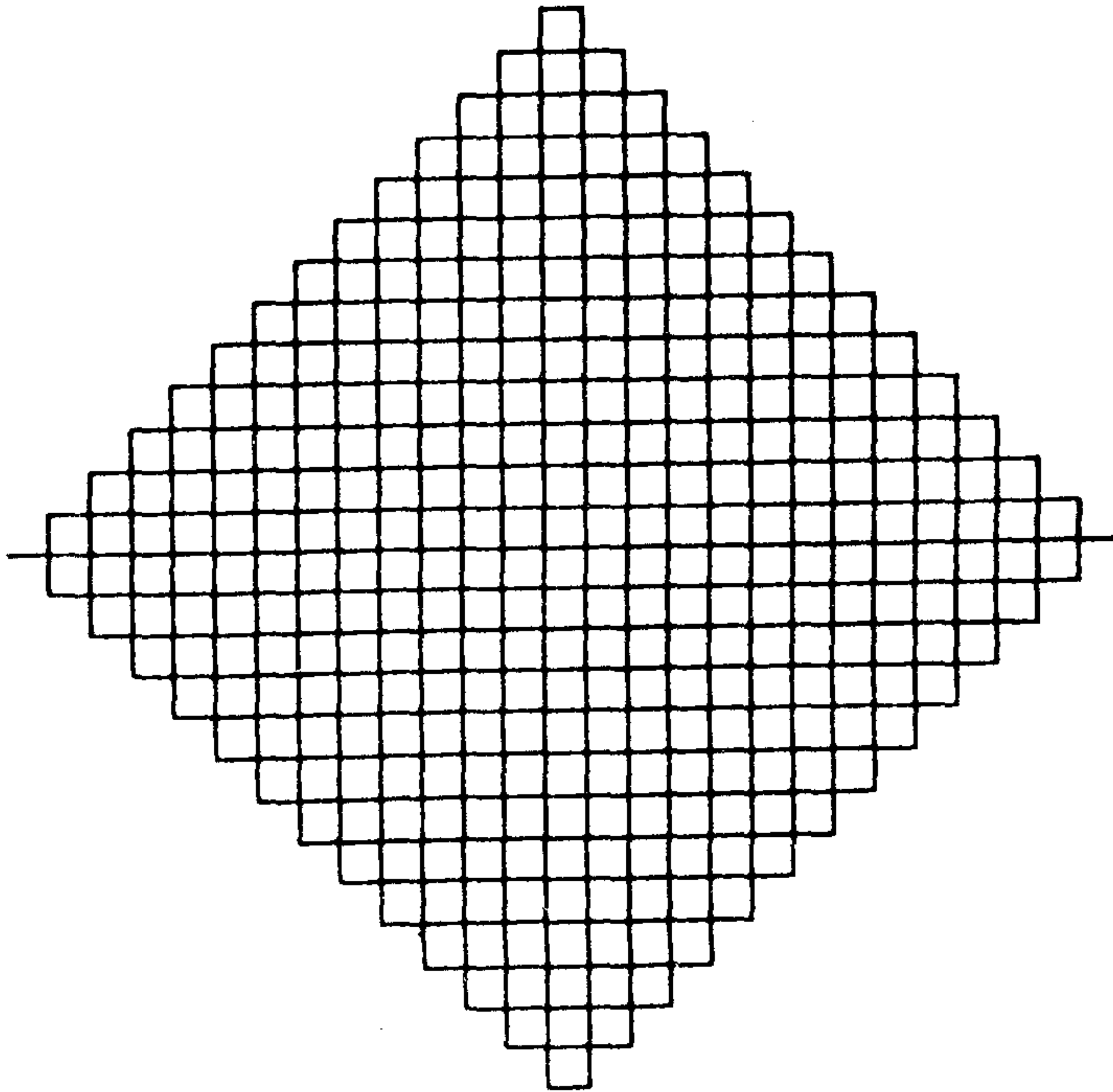


ب



$$N = 9 \quad r = \frac{1}{3}$$

$$D = \log(9) / \log(3) = 2$$



ج

شکل شماره ۲ - نمایش فرآیندهای تکراری در ایجاد طرح‌های فراکتالی

خط نیز، در فضای یک بعدی، از چنین خاصیتی برخوردار است و می‌توان آن را به  $N$  قسمت همانند و همسان تقسیم نمود که هر یک پاره خطی را در مقیاس کوچکتری به نسبت  $r = \frac{1}{N}$  از کل پاره خط اولیه تشکیل دهد (شکل شماره ۳) بنابراین برای فضای یک بعدی، می‌توان نوشت:

$$Nr^1 = 1 \quad (2)$$

به طریق مشابه، در فضای دو بعدی نیز، چنانچه مثلاً یک مربع به  $N$  قسمت خود همانند تقسیم شود، در هر بعد به نسبت  $r = 1/\sqrt{N}$  کوچکتر می‌شود (شکل شماره ۳) و رابطه زیر را بدست می‌دهد:

$$Nr^2 = 1 \quad (3)$$

همچنین، در فضای سه بعدی، اگر به عنوان مثال، مکعبی به  $N$  قسمت خود همانند تقسیم یابد، در هر بعد به نسبت  $r = 1/\sqrt[3]{N}$  کوچکتر می‌شود (شکل شماره ۳) که در رابطه زیر صدق می‌نماید:

$$Nr^3 = 1 \quad (4)$$

به همین ترتیب در فضای  $D$  بعدی نیز، چنانچه پدیده‌ای خود همانند به  $N$  قسمت متشابه با خود منقسم شود، در هر بعد به نسبت  $r = 1/\sqrt[D]{N}$  کوچکتر می‌شود و رابطه زیر برقرار می‌گردد:

$$Nr^D = 1 \quad (5)$$

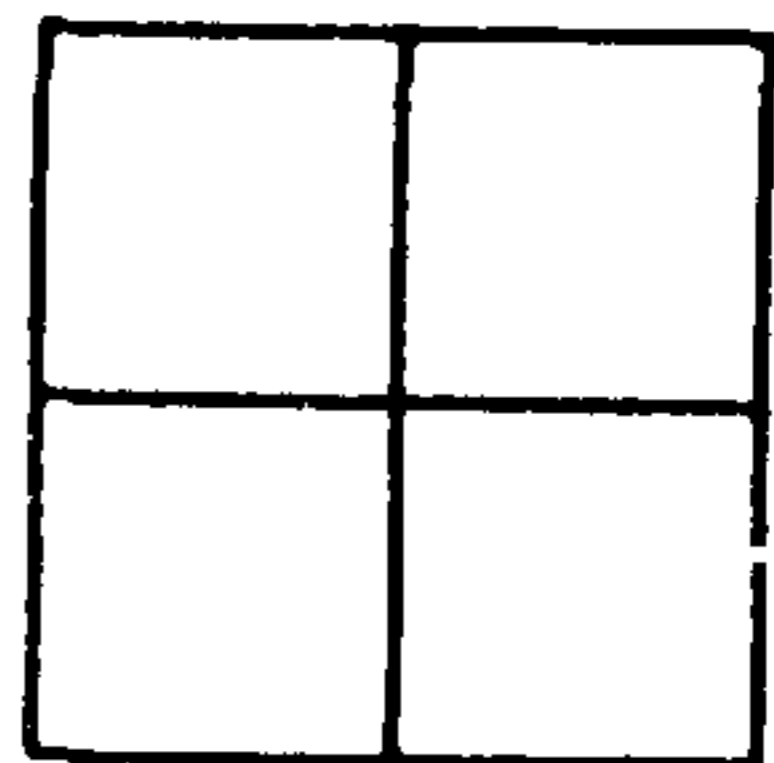
بنابراین، از رابطه (۵) چنین نتیجه می‌شود:

$$D = \log(N) / \log(1/r) \quad (6)$$

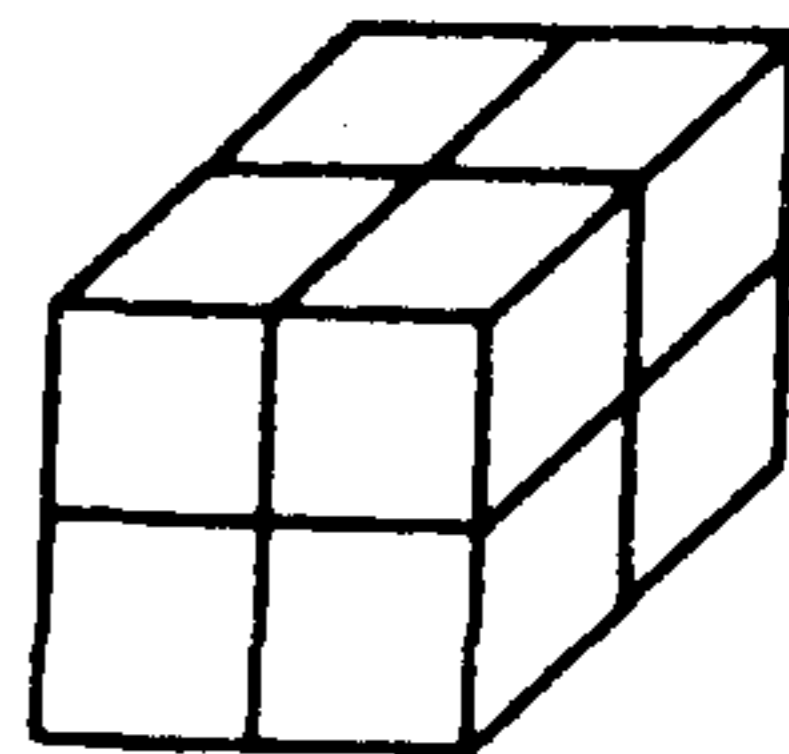
یک بعدی:  $N$  قسمت خودهمانند، مقیاس به نسبت  $(Nr^1 = 1) r = 1/N$



دو بعدی:  $N$  قسمت خود همانند، مقیاس به نسبت  $(Nr^2 = 1) r = 1/N^{1/2}$



سه بعدی:  $N$  قسمت خودهمانند، مقیاس به نسبت  $(Nr^3 = 1) r = 1/N^{1/3}$



حالت کلی،  $D$  بعدی:  $N$  قسمت خودهمانند، مقیاس به نسبت  $(Nr^D = 1) r = 1/N^{1/D}$

نتیجه: بعد فراکتالی (خود همانندی)  $D$ :  $D = \log(N) / \log(1/r)$

به عبارت دیگر، چنانچه پدیده‌ای خود همانند متشکل از  $N$  قسمت باشد، که هر قسمت در مقیاسی به نسبت  $r$  از کل بگنجد، ابعاد فراکتالی (یا ابعاد خود همانندی) آن برابر  $D$  خواهد بود و در حالت کلی، برخلاف فضای اقلیدسی، لازم نیست که  $D$  عددی صحیح باشد، بلکه می‌تواند عددی اعشاری نیز باشد. (۴۵ و ۴۶)

به عنوان مثال، در پدیده فراکتالی بالای شکل شماره ۲ (شکل شماره ۲-الف)، هر قطعه از آن، متشکل از چهار عنصر است و هر عنصر  $\frac{1}{3}$  پاره خط اولیه‌ای را تشکیل می‌دهد که قطعه مورد نظر جایگزین آن گردیده است (یعنی  $N=4$  و  $r=\frac{1}{3}$ )؛ لذا، ابعاد برخه‌ای آن برابر است با:

$$D = \log(4) / \log(3) = 1/26 \dots \quad (7)$$

چنانکه ملاحظه می‌گردد، بعد اعشاری بدست آمده، عددی بزرگتر از ۱ و کوچکتر از ۲ است و خواص غیرعادی پدیده برخه‌مند را بیان می‌دارد. منحنی برخه‌ای مورد بررسی، فضایی بیش از یک خط ساده ( $D=1$ ) و کمتر از فضای اقلیدسی یک صفحه ( $D=2$ ) را دربرمی‌گیرد. همچنین برای تصویر برخه‌ای وسط شکل ۲ (شکل ۲-ب) که در آن هر قطعه توسط ۸ قطعه، متشکل از عناصری در مقیاس  $\frac{1}{4}$  وضعیت پیشین، جایگزین شده است ( $N=8$  و  $r=\frac{1}{4}$ )، ابعاد برخه‌ای را می‌توان به صورت زیر محاسبه نمود:

$$D = \log(8) / \log(4) = 1/5 \quad (8)$$

مضافاً در پایین شکل شماره ۲ (شکل شماره ۲-ج)، هر قطعه جایگزین شونده، متشکل از ۹ عنصر است که هر عنصر در مقیاس  $\frac{1}{3}$  نسبت به وضعیت نخستین (نسخه اصلی) کوچکتر شده است ( $N=9$  و  $r=\frac{1}{3}$ ) و از اینرو می‌توان نوشت:

$$D = \log(9) / \log(3) = 2 \quad (9)$$

شایان توجه است که هر چه بعد فراکتالی ( $D$ ) از عدد ۱ بیشتر شده و به سمت عدد ۲ میل نماید، منحنی مربوط نیز از شباهت به خط دورتر شده و سطح بیشتری از صفحه را می‌پوشاند؛ تا آنجا که در حدّ، وقتی مقدار  $D$  به عدد ۲ برسد ( $D \rightarrow 2$ )، تصویری پوشا حاصل می‌گردد که صفحه را فرا می‌گیرد. از اینرو، بعد فراکتالی ( $D$ )، سنج‌های کمی برای بیان اعوجاجات و پیچش‌های منحنی‌ها، فراهم می‌آورد. مع الوصف، باید در نظر داشت،



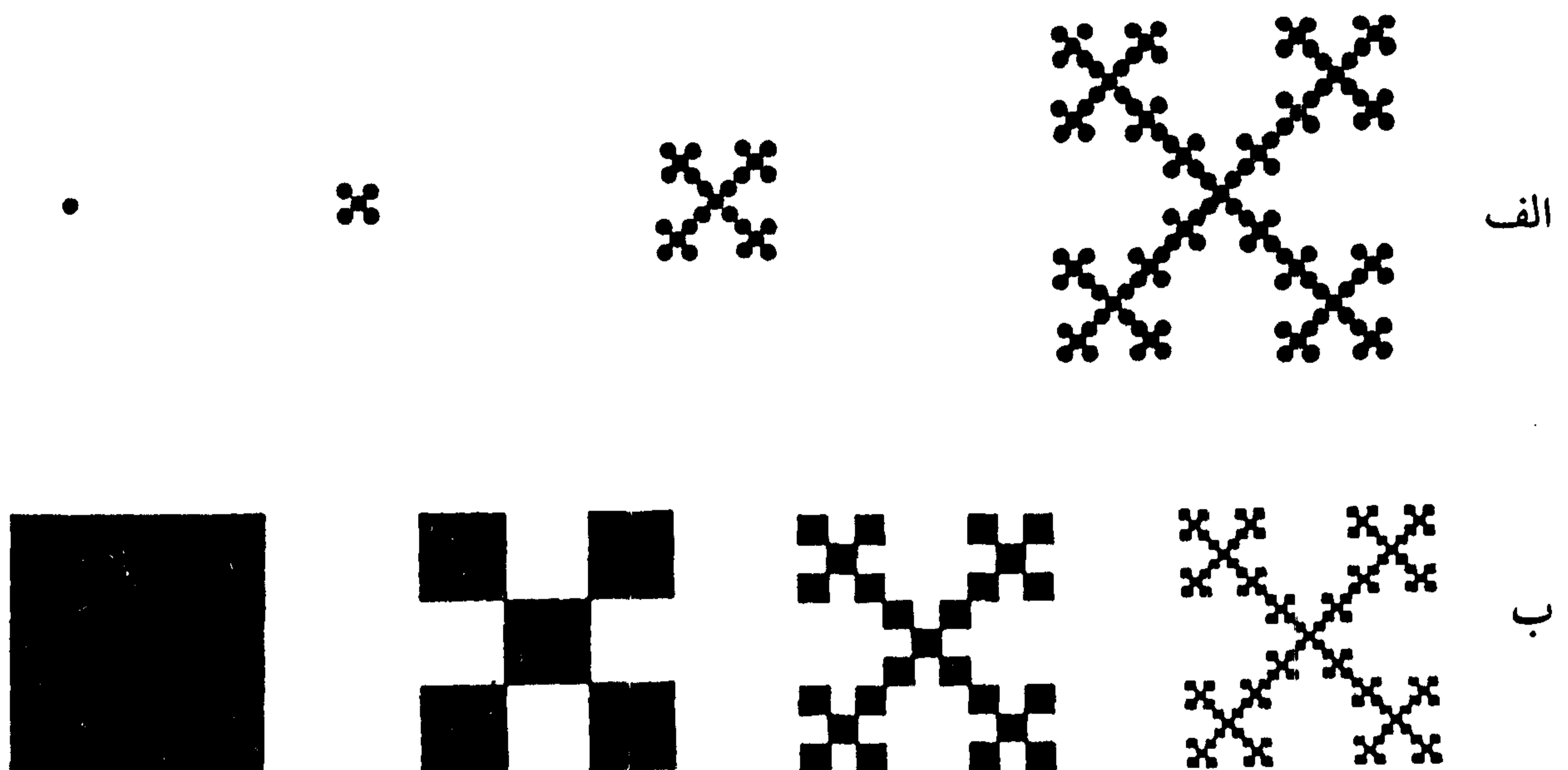
منحنی‌های با ابعاد برخه‌ای بین ۱ و ۲، کماکان، به عنوان منحنی‌هایی، از نظر توپولوژیک، دارای بعد ۱، به قوت خود باقی هستند؛ و ازاله حتی یک نقطه از آن می‌تواند منحنی را به دو پاره تقسیم نماید. (۴۷ و ۴۸)

آنچه تاکنون در ارتباط با خود همانندی ملاحظه گردید، جنبه متیقن (دیترمینیستیک) داشته و به عبارت دیگر، با به کارگیری روش‌های معین، می‌توان طرح‌های فراکتالی را بدست آورد. به عنوان مثالی دیگر، فراکتال‌های نشان داده شده در شکل شماره ۴ را در نظر بگیریم؛ در هر دو مورد (شکل‌های ۴-الف و ۴-ب)، هر قطعه جایگزین شده، متشکل از ۵ عنصر است ( $N=5$ ) در شکل ۴-ب، هر بعد مربع به نسبت  $\frac{1}{3}$  کوچکتر شده است ( $r=\frac{1}{3}$ ) و طبق رابطه (۶) می‌توان نوشت:

$$D = \log(N) / \log(1/r) = \log 5 / \log 3 = 1/465 \dots \quad (10)$$

لیکن در شکل شماره ۴-الف، ابعاد طرح، در هر تکرار، سه برابر می‌شود ( $r=3$ ). برای چنین حالت‌های رشد یابنده‌ای نیز، رابطه (۵) به صورت زیر نوشته می‌شود: (۴۹ و ۵۰)

$$Nr^{-D} = 1 \quad (11)$$



شکل شماره ۴ - نمایش ایجاد طرح‌های فراکتالی: الف - فرآیند تکراری در ایجاد فراکتال‌های رشد یابنده

ب - تقسیم مکرر طرح اولیه در ایجاد فراکتال

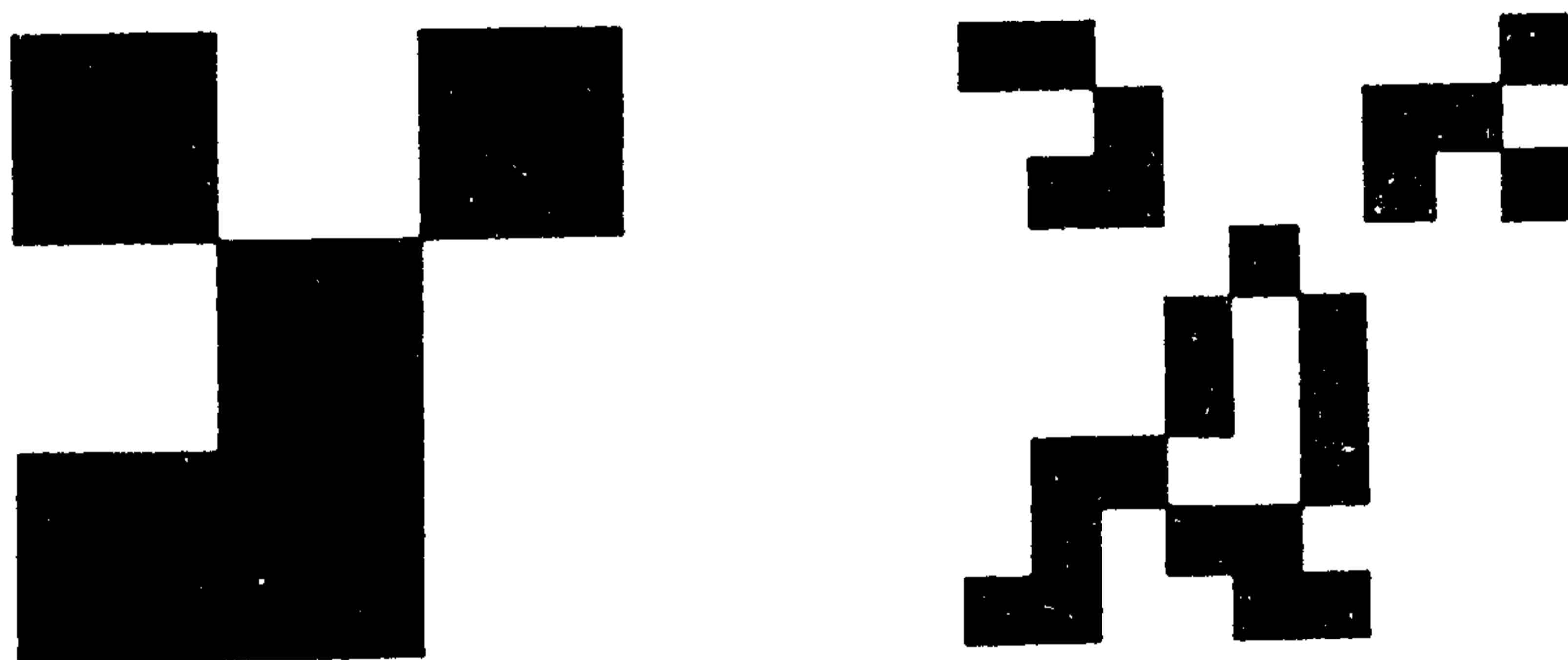
و بنابراین رابطه (۶) هم به صورت زیر نوشته خواهد شد:

$$D = \log(N) / \log(r) \quad (12)$$

و به این ترتیب، برای شکل شماره ۴- الف، ابعاد برخه‌ای به طریق زیر محاسبه می‌شود:

$$D = \log(5) / \log(3) = 1/465 \dots \quad (13)$$

چنانکه ملاحظه می‌گردد، در شکل شماره ۴، در هر دو مورد، ابعاد برخه‌ای،  $1/465$  است. اکنون شکل شماره ۵ را در نظر بگیریم، ابعاد فراکتالی این طرح نیز، همچون شکل شماره ۴- (ب)،  $1/465$  است؛ زیرا باز هم هر قطعه جایگزین، از ۵ عنصر که با نسبت  $\frac{1}{3}$  کوچکتر شده‌اند، تشکیل گردیده است ( $N=5$  و  $r=\frac{1}{3}$ ). در اینجا، در واقع، هر بار، مربع اولیه به ۹ قسمت مساوی (هر بعد به ۳ قسمت) تقسیم شده و ۵ قسمت آن به طور تصادفی جایگزین مربع نخستین گردیده است (۴ قسمت به طور تصادفی جاخالی کرده و حذف شده است). لذا اگرچه طرح فراکتالی شکل شماره ۵ با طرح موجود در شکل شماره ۴ (ب)، ظاهری متفاوت دارد، لیکن بعد فراکتالی هر دو یکسان ( $1/465$ ) است. این قبیل طرح‌های برخه‌ای، فراکتال‌های تصادفی یا خودهمانندی آماری (خودگونگی آماری یا تصادفی) نامیده می‌شود؛ زیرا شباهت، دقیق نیست و جنبه آماری یا تصادفی دارد. در این موارد، وصف «ناوردائی مقیاسی»<sup>۱</sup> نیز مصطلح است و غالباً به مفهوم خود همانندی آماری به کار می‌رود.



شکل شماره ۵- نمایش ایجاد فراکتال‌های تصادفی یا خودهمانندی آماری

(قابل قیاس با شکل شماره ۴- ب به گونه‌ای تصادفی یا آماری)

به هر حال، باید توجه داشت که شکل شماره ۵، یکی از ساده‌ترین انواع خود همانندی‌های آماری را نشان می‌دهد؛ مثلاً جای مربع‌های حذف شده، تنها موردی نیست که می‌تواند تصادفی رخ دهد؛ بلکه تعداد مربع‌ها و حتی نسبت اندازه ابعاد نیز می‌تواند، حول مقداری میانگین، تغییر نماید. به این ترتیب، برخلاف طرح‌های فراکتالی متیقن (دیترمینستیک) که طی پویش‌های معین حاصل می‌گردد، تشخیص خود همانندی آماری برای فراکتال‌های تصادفی و پدیده‌های نامنظم به سادگی امکان‌پذیر نیست و مستلزم بکارگیری روش‌های خاص است. (۵۱ و ۵۲)

### پدیده‌های فراکتالی تصادفی و نامنتظم

گام‌های تصادفی<sup>۱</sup> که حرکت برونی<sup>۲</sup> یا فرایند وینر<sup>۳</sup> نیز نامیده می‌شود و در رشته‌های مختلف علوم، کاربرد فراوان دارد، فرایند تصادفی پیوسته‌ای را مانند  $V(t)$  تشکیل می‌دهد که از تابع احتمال نرمال (گاسی)، با میانگین صفر و انحراف معیار  $\sqrt{t}$ ، پیروی می‌نماید و فواصل نقاط آن از عناصر تصادفی مستقل تکوین می‌پذیرد؛ به عبارت دیگر مشتق آن، یک فرایند نوفه سفید<sup>۴</sup> است؛ یعنی:

$$dV(t) / dt = W(t) \quad (14)$$

که در رابطه فوق  $W(t)$  یک فرایند نوفه سفید را تشکیل می‌دهد؛ به بیانی، حرکت برونی انتگرال نوفه سفید است. (۵۳) به این ترتیب، برای حرکت برونی که دارای انحراف معیار  $\sqrt{t}$  است، فواصل نقاط  $V(t)$  با جذر فواصل متناسب است و می‌توان نوشت: (۵۴ و ۵۵)

$$V(t) \sim (\Delta t)^{1/2} \quad (15)$$

رابطه فوق را می‌توان، در حالت کلی، به صورت زیر بیان کرد:

- 
- 1- Random Walk
  - 2- Brownian Motion
  - 3- Wiener Process
  - 4- White Noise

$$\Delta V(t) \sim (\Delta t)^H \quad (16)$$

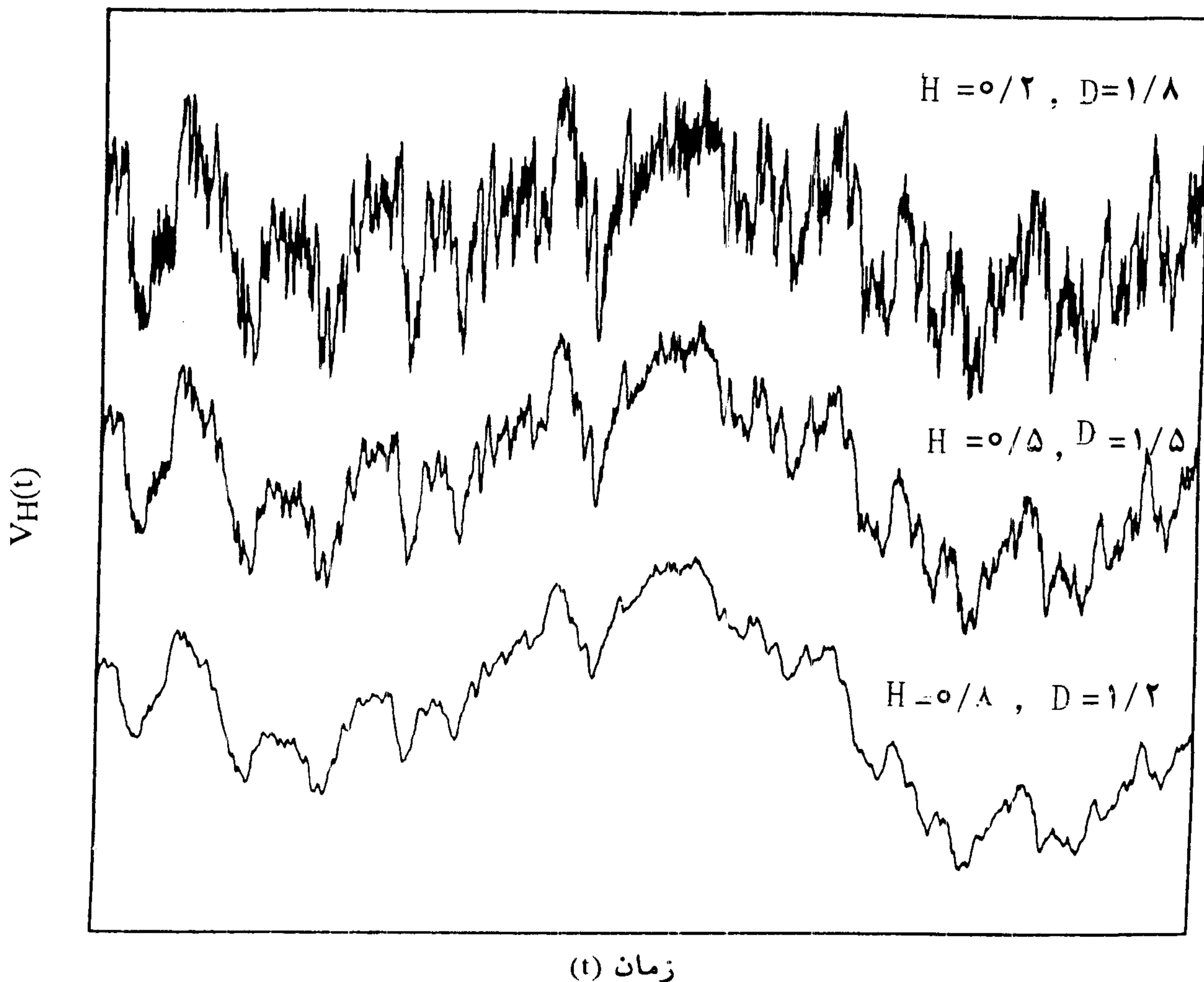
یعنی،  $\Delta V(t)$  با  $(\Delta t)^H$  متناسب است که  $H$ ، عددی بین صفر و یک است؛ و آنگاه که  $H = 0/5$  باشد، گام‌های تصادفی یا حرکت برونی حاصل خواهد شد و در غیر این صورت ( $H \neq 0/5$ )، فرایند مربوط، حرکت برونی خرد (یا حرکت برونی کسری)<sup>۱</sup> خوانده می‌شود، (۵۶ و ۵۷) و می‌توان آن را گامک‌های تصادفی نیز نامید. در واقع، وقتی که مقدار  $H$  به صفر نزدیک شود، فرایند تصادفی  $V(t)$ ، تضاریسی تند و ناهموار نشان می‌دهد و هنگامی که  $H$  به یک نزدیک باشد، اعوجاجات آن نسبتاً هموار می‌گردد. نمونه‌ای از فرایند تصادفی  $V(t)$  برای سه مقدار  $H = 0/2$ ،  $H = 0/5$  و  $H = 0/8$  در شکل شماره ۶ نشان داده شده و چنانکه ملاحظه می‌گردد، فرایند وسط، حرکت برونی (گام‌های تصادفی) و دو فرایند دیگر حرکت برونی خرد (گامک‌های تصادفی) را نشان می‌دهد.

حرکت برونی خرد یا گامک‌های تصادفی، الگوی ریاضی بسیار مناسبی را برای مدل‌سازی فراکتال‌های تصادفی و برخه‌مندان نامنتظم، در اختیار می‌گذارد و به این طریق بسیاری از پدیده‌های فراکتالی موجود در طبیعت (مانند کوه‌ها، ابرها، سواحل، ...)، مدل‌بندی و شبیه‌سازی شده‌اند. (۵۸ و ۵۹)

لیکن باید توجه داشت که رابطه (۱۶) حرکت برونی خرد یک بعدی (با یک متغیر مانند  $t$ ) را ارائه می‌نماید و برای فضاهاى چند بعدی باید از حرکت برونی خرد چند بعدی (با چند متغیر) استفاده نمود. شایان توجه است که گامک‌های تصادفی یک بعدی، مانند  $V(t)$  در رابطه (۱۶)، فضای برخه‌ای بین یک و دو بعدی را پوشش می‌دهند و می‌توان نشان داد (۶۱) که بعد فراکتالی آن  $D$ ، برابر است با:

$$D = 2 - H \quad (17)$$

به عبارت دیگر حرکت برونی ( $H = 0/5$ ) دارای بعد فراکتالی  $1/5$  و حرکات برونی خرد که در بالا و پایین شکل شماره ۶ نشان داده شده‌اند ( $H = 0/2$  و  $H = 0/8$ ) به ترتیب دارای ابعاد فراکتالی  $D = 1/8$  و  $D = 1/2$  هستند.



شکل شماره ۶- نمایش نمونه‌هایی از حرکت برونی خرد یا گامک‌های تصادفی  $V_H(t)$  در مقابل زمان  $(t)$  برای مقادیر مختلف  $D, H$

برای حرکت برونی خرد دو متغیره می‌توان نوشت:

$$\Delta V \sim (\Delta r)^H \quad \text{و} \quad 0 < H < 1 \quad (18)$$

که در آن:

$$\Delta r = (\Delta x^2 + \Delta y^2)^{\frac{1}{2}}$$

و برای مدل‌بندی پدیده‌های فراکتالی مانند کوه‌ها، می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد، بعد

فراکتالی آن (که بزرگتر از دو است)، به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$D = 3 - H \quad (19)$$

در مورد حرکت برونی خرد سه متغیره نیز رابطه (۱۸) همراه با رابطه زیر، به کار می آید:

$$\Delta r = (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)^{\frac{1}{2}} \quad (20)$$

و بعد فراکتالی آن برابر است با:

$$D = 4 - H \quad (21)$$

این حالت می تواند، مثلاً برای مدل بندی پدیده های فراکتالی مانند ابرها، بکار رود. (۶۲ - ۶۴) سرانجام، در حالت کلی، برای حرکت برونی خرد چند متغیره، می توان، رابطه (۱۸) را همراه با رابطه (۲۰)، مطمح نظر قرار دارد؛ لیکن، در رابطه (۲۰) به متغیرهای موجود (z,y,x) متغیرهای جدید، به همان ترتیب افزوده می شود. به عبارت دیگر، چنانچه حرکت برونی خرد، n متغیره باشد رابطه (۲۰) شامل مجذورات تغییر هر یک از n متغیر خواهد بود و ابعاد فراکتالی آن نیز طبق رابطه زیر قابل محاسبه است: (۶۵ - ۶۸)

$$D = n + 1 - H \quad (22)$$

مضافاً، چنانچه برای حرکت برونی خرد، یعنی فرایند  $V(t)$ ، تابع چگالی طیفی  $S_v(f)$  محاسبه شود (که به طریقه های مختلف، مانند تبدیل فوریه تابع خود همبستگی مربوط به  $V(t)$  می توان  $S_v(f)$  را محاسبه نمود (۶۹) و  $\log S_v(f)$  در مقابل  $\log(f)$  ترسیم گردد، معمولاً یک خط راست با شیب  $-b$  به دست می آید؛ به عبارت دیگر، برای حرکت برونی خرد،  $S_v(f)$  با  $1/f^b$  متناسب است: (۷۰ و ۷۱)

$$S_v(f) \sim 1/f^b \quad (23)$$

عدد  $b$ ، نمای طیفی<sup>۱</sup> نامیده می شود و در حالت کلی، می توان نشان داد که بین  $b$  و  $H$  (برای حرکت برونی خرد) رابطه زیر برقرار است: (۷۲ و ۷۳)

$$b = 2H + 1 \quad (24)$$

بنابراین، با استفاده از رابطه فوق، رابطه (۲۲) را برای محاسبه بعد فراکتالی (D)، می توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$D = n + 1 - H = n + \frac{3-b}{2} \quad (25)$$

در روابط فوق که  $H$  یک عدد اعشاری است ( $0 < H < 1$ )،  $b$  نیز بین ۱ و ۳ قرار می‌گیرد ( $1 < b < 3$ ) و به این ترتیب بعد فراکتالی  $D$  بین  $n$  و  $n + 1$  واقع می‌شود ( $n < D < n + 1$ ). چنانکه قبلاً ملاحظه گردیده است (شکل شماره ۶)، در ازای  $H = 0/5$ ، یعنی  $b = 2$ ، حرکت برونی، و در ازای سایر مقادیر  $H$  ( $0 < H < 0/5$  و  $0/5 < H < 1$ )، یعنی  $1 < b < 2$  و  $b > 2$ ، حرکت برونی خرد، حاصل می‌شود. مقدار  $H$  برای پدیدارهای گوناگون متفاوت است (۷۴ - ۸۱)؛ لیکن، برای غالب پدیده‌های مشهود در طبیعت (مانند کوه‌ها، ابرها، ساحل‌ها، ...)  $H \approx 0/8$  که به طریق تجربی به دست آمده است، مقدار مناسبی را ارائه می‌نماید. (۸۲ - ۸۴)

در مورد پدیده‌های فراکتالی تصادفی و نامنتظم، موضوع خود همانندی، با آنچه که پیشتر (به عنوان خود همانندی دقیق و یا آماری) مطرح گردید، می‌تواند متفاوت باشد. در خاصیت خود همانندی، در اثر درشتنمایی، شکل‌ها (به طور دقیق یا آماری) تکرار می‌شوند؛ حال آنکه، در فراکتال‌های تصادفی و نامنتظم، تکرار آماری فقط هنگامی می‌تواند امکان‌پذیر گردد، که درشت‌نمایی در ابعاد مختلف، به اندازه‌های متفاوت انجام گیرد. به عنوان مثال در حرکت برونی خرد، مانند  $V(t)$ ، بزرگنمایی در جهت‌های  $V$  و  $t$ ، باید به اندازه‌های متفاوت صورت پذیرد؛ اگر  $t$  به میزان  $m$  بزرگ شود (یعنی  $t$  به  $mt$  تبدیل گردد)، آنگاه  $V$  باید به اندازه  $m^H$  درشت شود (یعنی  $V$  به  $m^H V$  تبدیل گردد). از این رو، برای گام‌های تصادفی (حرکت برونی)، که  $H = 0/5$  است، باید در جهت  $t$  چهارگام برداشت تا  $V$  دوبرابر شود. این نایکنواختی مقیاسی که طی تبدیلات نایکنواخت مختصات، پدیده‌ها و اشکال، به لحاظ آماری ناوردا می‌مانند، خاصیت «خودخویشی» (خود خویشاوند) نامیده می‌شود. (۸۵ - ۸۷)

بنابراین، خود همانندی عبارت است از ناوردایی خواص هندسی در نتیجه تغییرات همسان در مقیاس، در حالی که خودخویشی یا خود خویشاوندی، ناوردایی مقیاسی را فقط آنگاه محفوظ داشته و بروز می‌دهد که تغییرات مقیاس به عنوان تابعی از بعد یا جهت

(مختصات) صورت پذیرد. (۱۰۱) به عنوان مثال، توابع تک متغیره مشتق ناپذیر، نمونه ساده و مشخصی از نوع تبدیلاتی هستند که خود خویشی می تواند در آنها تجلی یابد؛ بویژه اگر چنین توابعی دارای خاصیت زیر باشند:

$$F(x) = b^{-a}F(bx) \text{ و } a > 0 \quad (26)$$

پدیده خود خویشاوندی تحقق می پذیرد. (۸۹) از این رو حرکت برونی خرد، طبق رابطه (۱۶) یا (۱۸)، پدیده‌ای خود خویشاوند ایجاد می نماید.

آنچه ملاحظه گردید، نهایتاً مبین آن است که در پدیده‌های فراکتالی، اجزاء تشکیل دهنده، هر یک مشابه همدیگر و مشابه کل پدیده هستند؛ در پدیده‌های متیقن (دیترمینیستیک)، این خاصیت به خود همانندی موسوم است. چنانچه تشابهات مورد نظر، در برخی نقاط، به طور جسته گریخته، پراکندگی‌های تصادفی بروز دهند (پدیده‌های تصادفی). خود همانندی آماری مطرح می گردد. به علاوه، اگر بعضی اجزاء پدیده، دارای اعوجاج، اریب یا کژری باشند، و به عبارت دیگر، در جهات مختلف به نسبت‌های متفاوت، تغییر نشان دهند، خاصیت خود خویشی (خود خویشاوندی) بارز می شود. (۹۰)

مطالب و خاصیت‌هایی که تاکنون مورد بحث قرار گرفت، بویژه در فرایندهای رشد و توسعه، حایز اهمیت و شایان توجه است که متعاقباً از نظر خواهد گذشت.

### توسعه و رشد فراکتالی

هر فرایند یا پدیده‌ای که در گذر زمان، دگرگونی و تحول حاصل نماید، سیستمی پویا را تشکیل می دهد؛ رشد و توسعه، به عنوان خصلتی عمومی و بارز، از اهم این تغییر و تبدیلات محسوب گردیده، لااقل در دورانی از تحولات سیستم‌های پویا جلوه گر می شود و غالباً تحت تأثیر فراگردهای بازخوران مثبت رخ می نماید. (۹۱ - ۹۵)

پدیده‌های فراکتالی موجود در طبیعت نیز، عموماً، محصول فرایندهای رشد و توسعه هستند و اختصاصاً، روشی ویژه تحت عنوان سیستم‌های «ال»<sup>۱</sup> یا سیستم‌های



«لیندنمایر»<sup>۱</sup> برای تبیین و توصیف پدیده‌های توسعه و رشد طبیعی، تخصیص یافته است. (۹۶) در این روش، برای تبیین توسعه فراکتالی در گذر زمان، دو شیوه مدل‌سازی، یکی الگوهای فرسایشی، برای پدیده‌های فراکتالی تحلیل رونده (مانند کوه‌ها)، و دیگری الگوهای تکاملی، برای پدیدارهای فراکتالی گسترش یابنده (مانند گیاهان و درختان)، بکار می‌رود. (۹۷ و ۹۸) به هر حال، بین فرابند رشد و توسعه از یکسو و شکل و شمایل از دیگر سو، همواره ارتباطی قوی وجود دارد و نرخ رشد در این ارتباط تعیین کننده است؛ ایجاد شکل، از نظر ریاضی، تابعی از زمان است و در واقع، شکل یک سازواره، صرفاً پیکره‌ای فضایی نیست، بلکه به عنوان واقعه‌ای در فضا - زمان، قابل تلقی است. (۹۹ و ۱۰۰)

الگوی سیستم «ال» که به سیستم «بازنوشت موازی»<sup>۲</sup> نیز موسوم است، اساساً بر این نظریه استوار است که توسعه یک سازواره می‌تواند به عنوان اجرای (مکرر) یک برنامه توسعه موجود در هسته اولیه (تخمک بارور شده) نگریسته شود و سازواره توسعه یابنده، مجموعه‌ای پویا از خودکاره‌های متناهی را تشکیل می‌دهد که به طرز مناسب برنامه‌ریزی شده‌اند. (۱۰۱) این سیستم برای مدل‌سازی ریاضی و ترسیم‌های رایانه‌ای سازواره‌ها در زیست‌شناسی، گیاه‌شناسی و موارد متعددی در سیستم‌های پویا به کار گرفته شده و به نتایج موفقیت‌آمیز و درخشانی منجر گردیده است. (۱۱۸ - ۱۱۲)

در تبیین مبانی سیستم مورد بحث، به عنوان مثال می‌توان ساقه درختی را در نظر گرفت که به دو شاخه تبدیل می‌شود و هر شاخه نیز خود به دو شاخه منشعب می‌گردد و بر پایه این قاعده درخت رشد می‌نماید. به این ترتیب، قانون رشد و تحول درخت مزبور چنین بیان می‌دارد که از هر شاخه موجود، دو شاخه می‌روید. وضعیت اولیه این درخت، یک شاخه (ساقه) است و چنانچه قانون فوق‌الذکر  $n$  بار، مکرراً به کار رود، درختی حاصل می‌گردد که  $2^n$  شاخه دارد. از آنجا که تنه درخت نیز می‌باید، از نظر اندازه، رشد و افزایش پیدا کند تا بتواند با برخورداری از قدرت لازم، وزن شاخه‌ها را تحمل نماید، هر آینه، بیش از پیش و به

1- Aristid Lindenmayer (1925 - 1989)

2- Parallel Rewriting System

منابع بیشتری نیاز خواهد داشت تا شاخه‌های دیگری را برویاند. از این رو، چنانچه عرضه منابع ثابت باشد و یا آنکه لااقل، نسبت عوامل تعیین کننده (مانند قطر تنه درخت) به منابع ثابت فرض شود، آنگاه زمان لازم برای رویش شاخه‌های جدید (رشد درخت)، متناسب خواهد بود با تعداد شاخه‌هایی که می‌رویند. پدیده رشد درخت، خصلت فراکتالی بارزی دارد و قانون رشد یک درخت مورد نظر، مثال مشخصی از فرایندهای فراکتالی را ارائه می‌نماید. در مثال فوق، محدودیت مربوط به عامل زمان موجب می‌شود که فاصله زمانی بین هر نسل جدید از شاخه‌ها، به صورت تصاعد هندسی زیر افزایش یابد:

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 16 \rightarrow 32 \rightarrow 64 \rightarrow \dots \quad (27)$$

یا به عبارت دیگر:

$$2^0 \rightarrow 2^1 \rightarrow 2^2 \rightarrow 2^3 \rightarrow 2^4 \rightarrow 2^5 \rightarrow 2^6 \rightarrow \dots \quad (28)$$

نمایش لگاریتمی سری زمانی فوق یک خط راست خواهد بود؛ یعنی:

$$0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow \dots \quad (29)$$

در واقع، هر نسل جدید در نتیجه عملکرد قاعده تبدیل و تحول، یا به بیان دیگر، قانون رشد و توسعه، در هر بار، حاصل می‌گردد؛ مانند اینکه هر شاخه، دو شاخه جدید تولید کند. فرایندهای فراکتالی که در آنها، فاصله بین نسل‌ها، تابعی از اندازه طرح فراکتالی باشد (مثلاً تعداد شاخه‌ها)، توزیعی تصاعدی (در فاصله‌ها) بروز می‌دهند، یعنی نمایش لگاریتمی توزیع فاصله‌ها یک خط راست خواهد بود. (۱۱۳ و ۱۱۴)

آنچه به عنوان موردی مشخص و نمونه‌ای بارز درباره رشد درخت بیان شد، در باب رشد و توسعه، مراحل تبدیل و تحول و دوره‌های گذار، در بسیاری از سازواره‌ها، سازمان‌ها و سیستم‌های دیگر نیز می‌تواند مصداق یابد. (۱۱۵ - ۱۲۷) به منظور تشریح و تبیین این واقعیت، و در حالت کلی، می‌توان فرایند یا سیستم بغرنج و خود سازمان دهنده‌ای را در نظر گرفت که در مراحل پویایی خود، هر بار، توسعه و رشدی به بزرگی یا اندازه  $M$  حاصل کند و تعداد چنین وقایعی،  $N_M$  برای آن سیستم از رابطه زیر پیروی نماید:

$$N_M = C/M^p \quad (30)$$

در رابطه فوق  $C$  یک مقدار ثابت و توان  $p$  یک عدد ثابت است. صرفاً به عنوان تمثیل

عددی و برای توضیح موضوع مورد بحث، فرض کنیم که در یک سیستم معین،  $p = 1/716$  باشد و اگر  $C = 1$  انتخاب شود،  $N_M$  تعداد مراحل رشد را در طول مدت یکسال ارائه نماید. در این حالت رابطه (۳۰) به صورت زیر نوشته خواهد شد:

$$N_M = 1/M^{1/716} \quad (31)$$

اینک و در ادامه تمثیل عددی، چنانچه بزرگی یا اندازه تحولات رشد و توسعه، در مقیاس سیستم مورد نظر (واحد اندازه‌گیری)، برابر  $\frac{1}{10}$  باشد، تعداد دوره‌های تبدیل و تحول را می‌توان به طریق ذیل محاسبه کرد:

$$N_{1/10} = 1/(1/10)^{1/716} \approx 52 \quad (32)$$

چنانکه ملاحظه می‌گردد، تعداد دوره‌های گذار در فرایند رشد و توسعه سیستم مزبور، ۵۲ مرحله (هر مرحله به اندازه  $\frac{1}{10}$ ) در سیستم رخ می‌دهد. همچنین، با استفاده از رابطه (۳۱)، می‌توان تعداد تحولاتی را محاسبه نمود که هر یک به اندازه ۱۰ برابر بزرگی تحولات هفتگی، طی مدت یکسال روی می‌دهند؛ یعنی:

$$N_1 = 1/1^{1/716} = 1 \quad (33)$$

به عبارت دیگر، در هر سال یک تحول یا دوره گذار که ده برابر تحولات (گذرهای) هفتگی است سپری می‌شود. به طریق مشابه می‌توان محاسبه نمود که گذرها یا تحولات به بزرگی ۲ برابر (دو برابر اندازه رشد سالیانه) تقریباً هر سه سال یکبار، به بزرگی ۳ تقریباً هر ۷ سال یکبار، به بزرگی ۱۰ تقریباً هر ۵۲ سال یکبار، ... اتفاق می‌افتد. به این ترتیب ملاحظه می‌گردد که تعداد تحولات عمده یا عظیم، در طول حیات یک سیستم، ممکن است بسیار محدود یا حتی معوق به محال باشد و هرگز روی ندهد. (۱۲۸ و ۱۲۹)

مقایسه روابط (۳۰) و (۵) نشانگر آن است که نمای  $p$  (یا  $1/716$  در مثال عددی فوق)، بعد فراکتالی یا بعد خود همانندی سیستم را ارائه می‌نماید. به هر حال، خصلت فراکتالی رشد و توسعه در سیستم‌های پویا، فرایندهای تحول در تحول، گذارهای متداخل و تو در تو، روندهای پیچ در پیچ، مسیرهای رفتاری مارپیچی و حلزونی را شامل می‌شود. خاصیت خود همانندی نیز همانگونه که در طرح‌های حلزونی، مارپیچی‌ها و حلقه‌های متداخل قابل ملاحظه است، در اینگونه توسعه و تحولات فراکتالی هم می‌تواند یافت شود. لیکن بروز

تغییراتی که جنبه آماری دارند، خود همانندی آماری را موجب می‌گردد و به یک نسبت نبودن رشد و توسعه در همه ابعاد و جهات، پدیده خود خویشی (خود خویشاوندی) را باعث می‌شود. به عنوان مثال، در فرایند رشد یک انسان و شباهت‌های او در سنین مختلف، یا شباهت فرزند به والدین، منظور آن نیست که، مثلاً یک فرد بالغ همان موجود یا کودک سابق است که در مقیاس بزرگتری قرار گرفته و درشت شده باشد؛ به عبارت دیگر تشابه هندسی (در مفهوم ریاضی آن) مراد نیست؛ بلکه در فرایند رشد فرد، هر یک از اندام‌ها و ویژگی‌ها در مقیاس متفاوتی رشد و تحول حاصل می‌نماید. مشخصاً، در دوران طفولیت، اندازه نسبی سر به تن، بزرگتر از حد آن در دوران بزرگسالی است. حتی در چهره نیز، نسبت اندازه‌های اعضاء در کودکی و بزرگسالی، متفاوت است؛ رشد اندام‌های صورت، با یک تناسب خطی حاصل نمی‌گردد و پدیده رشد غیر خطی بر آن حاکم است. رشد دیگر اندام‌های بدن نیز به گونه‌ای نیست که بتواند تشابه هندسی (در مفهوم ریاضی) ایجاد نماید. (۱۳۰ - ۱۳۴)

به منظور امکان بررسی بیشتر در زمینه موضوع مورد بحث، جدول شماره ۱، اندازه‌های قامت و سر فردی را در سنین مختلف (۱۳۵)، همراه با نسبت و لگاریتم اندازه‌ها، نشان می‌دهد. تغییرات نسبت اندازه سر به قامت، در قبال سن، در شکل شماره ۷ ترسیم گردیده و چنانکه مشاهده می‌گردد، این نسبت ثابت نمی‌ماند و تشابه هندسی را محفوظ نمی‌دارد. اگر چه نسبت مزبور در ابتدا تقریباً ثابت است و به طور تقریبی رشد تناسبی را بیان می‌کند، اما پس از سه سالگی، کاهش فاحشی می‌پذیرد و بر این واقعیت دلالت می‌نماید که قد، به نسبت، سریع‌تر از سر رشد می‌کند. این مرحله رشد غیر تناسبی که به پدیده رشد آلومتریک<sup>۱</sup> موسوم است، در حدود سی سالگی متوقف می‌شود و با تکمیل فرایند رشد، نسبت رشد (سر به قامت) نیز مجدداً تثبیت می‌یابد. مضافاً، با ترسیم نمایش تغییرات لگاریتم اندازه سر در مقابل لگاریتم اندازه قامت، در شکل شماره ۸، می‌توان چگونگی ارتباط این دو پدیده را در فرایند رشد، مورد مطالعه قرار داد. شکل شماره ۸ نیز وجود دو مرحله متمایز را، در فراگرد رشد فرد، تأیید می‌نماید. در مرحله اول (تا ۳ سالگی) خطی با شیب (تقریبی) واحد از نقاط

جدول شماره ۱ - اندازه‌های قامت و سر فرد (در سنین مختلف)، نسبت اندازه سر به قامت و لگاریتم اندازه‌ها

سن (سال)	اندازه سر (سانتیمتر)	اندازه قامت (سانتیمتر)	نسبت اندازه‌ها	لگاریتم اندازه سر	لگاریتم اندازه قامت
۰	۱۱	۵۰	۰/۲۲	۱/۰۴	۱/۷۰
۱	۱۵	۷۰	۰/۲۱	۱/۱۸	۱/۸۵
۲	۱۷	۷۹	۰/۲۲	۱/۲۳	۱/۹۰
۳	۱۸	۸۶	۰/۲۱	۱/۲۶	۱/۹۳
۵	۱۹	۹۹	۰/۱۹	۱/۲۸	۲/۰۰
۱۰	۲۱	۱۲۷	۰/۱۷	۱/۳۲	۲/۱۰
۲۰	۲۲	۱۵۱	۰/۱۵	۱/۳۴	۲/۱۸
۲۵	۲۳	۱۶۷	۰/۱۴	۱/۳۶	۲/۲۲
۳۰	۲۳	۱۶۹	۰/۱۴	۱/۳۶	۲/۲۳
۴۰	۲۳	۱۶۹	۰/۱۴	۱/۳۶	۲/۲۳

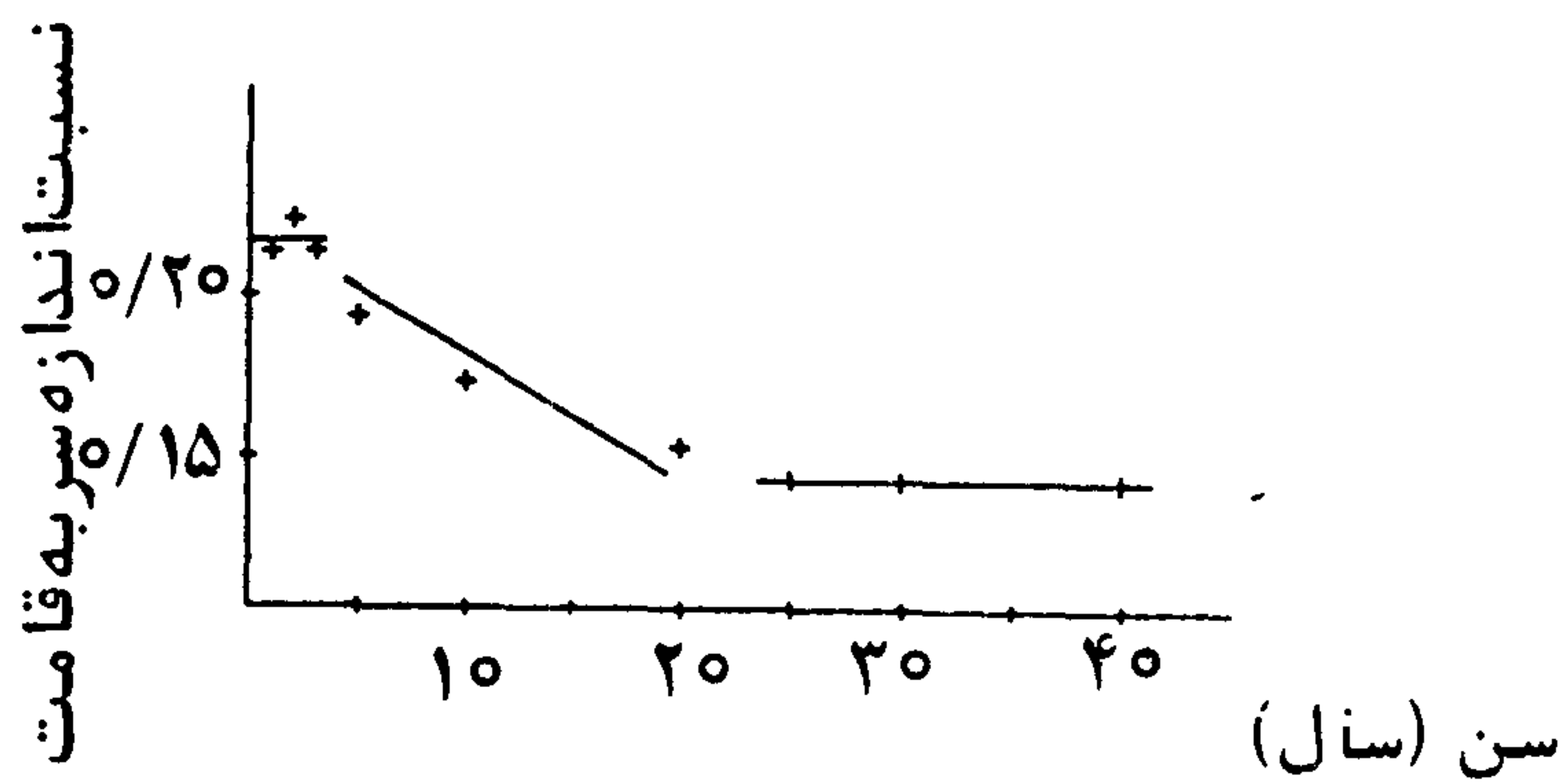
می‌گذرد که حکایت از نرخ رشد یکسان و رابطه‌ای تناسبی بین رشد قامت و سر دارد. در مرحله دوم، شیب خط به مراتب کمتر و در حدود  $\frac{1}{3}$  است و رابطه‌ای توانی (توان‌دار) بین دو متغیر (اندازه‌های قامت و سر) را می‌نمایاند؛ طبق این رابطه، اندازه سر، متناسب با ریشه سوم اندازه قامت رشد می‌کند. به بیان دیگر، می‌توان گفت که اندازه قامت با توان سوم اندازه سر متناسب است و به این ترتیب، قامت بسیار سریع‌تر از اندازه سر رشد می‌نماید. البته این نکته شایان توجه است که مطالعه فوق‌الذکر بر ویژگی‌های رشد یک فرد مبتنی گردیده و به هیچ وجه نمی‌تواند جایگزین پژوهشی گسترده در این زمینه گردد و یا چنین نیازی را مرتفع کند؛ اما در اینجا، تبیین چگونگی ارتباط الگوهای ریاضی توانی (توان‌دار) با فرایندهای رشد خود همانند، مورد نظر بوده است. در واقع، چنانچه متغیری مانند  $y$ ، متناسب با توانی از متغیری دیگر مانند  $x$ ، رشد نماید، یعنی:

$$y \sim x^d \quad (34)$$

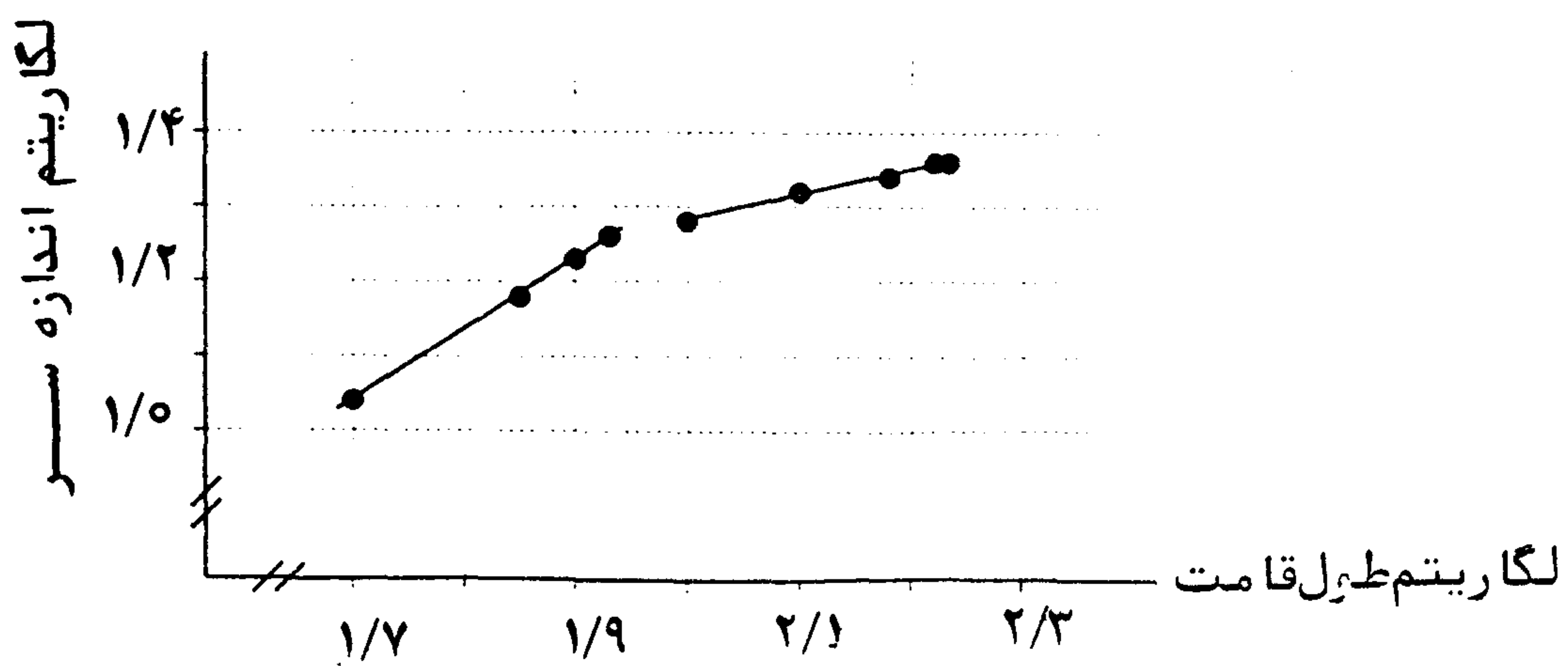
می توان نشان داد که بعد فراکتالی یا خود همانندی مربوط،  $D$  برابر است با:

$$D = 1 + d \quad (35)$$

بنابر این، با ترسیم نمایش تغییرات  $\log y$  در مقابل  $\log x$ ، چنانچه خط راستی با شیب  $d$  از نقاط عبور نماید، می توان شیب خط ( $d$ ) را برای محاسبه بعد فراکتالی (بعد خود همانندی)، در رابطه (۳۵) مورد استفاده قرار داد. (۱۳۶ و ۱۳۷)



شکل شماره ۷ - نمایش تغییرات نسبت اندازه سر به قامت در مقابل سن (ارقام جدول شماره ۱)



شکل شماره ۸ - نمایش تغییرات لگاریتم اندازه سر در مقابل لگاریتم طول قامت (ارقام جدول شماره ۱)

چنانکه تاکنون ملاحظه گردیده است، اگر تابع توان‌دار، مستقیماً تعداد تحول یا تکررها را به عنوانی توانی از اندازه‌ها بیان نماید: نمای موجود در رابطه توان‌دار، با بعد فراکتالی یا خود همانندی، برابر است؛ مانند  $D$  در رابطه (۵)،  $p$  در رابطه (۳۰) یا عدد  $1/716$  در روابط (۳۱) و (۳۲). در غیر این صورت، چنانچه تابع توان‌دار، طول‌ها یا فاصله‌ها را بر حسب توانی از اندازه‌ها (مثلاً با نمای  $l$ ) مشخص کند، در این حالت نمای مربوط  $(l)$  شیب خط راستی است که از نقاط مربوط به نمایش لگاریتم طول‌ها یا فاصله‌ها در مقابل لگاریتم اندازه‌ها می‌گذرد و بعد فراکتالی یا بعد خود همانندی با افزودن واحد به نما یا شیب خط لگاریتمی  $(l + 1)$ ، طبق رابطه (۳۵) بدست می‌آید. به عنوان مثال، برای طرح فراکتالی موجود در شکل شماره ۲ (ب) پیش از این، در رابطه (۸) بعد خود همانندی محاسبه شده و برابر است با:

$$D = 1/5 \quad (36)$$

محاسبه فوق بر اساس رابطه (۵) یا به عبارت دیگر رابطه (۶) انجام گرفته است و می‌توان نوشت:

$$N = \left(\frac{1}{r}\right)^{1/5} \quad (37)$$

در این رابطه،  $N$  تعداد تکررها (قسمت‌ها)، هر یک به اندازه  $\frac{1}{r}$  کل، است. اینک می‌توان به روش دیگر نیز بعد فراکتالی طرح مزبور را بدست آورد. همانگونه که در شکل شماره ۲ (ب) ملاحظه می‌گردد، پیدایش طرح فراکتالی مورد نظر، از قطعه خطی (مثلاً به طول واحد) شروع می‌شود. در گام اول، پاره خط مزبور توسط یک خط چندبر، متشکل از ۸ قطعه، هر قطعه به طول  $\frac{1}{4}$  جایگزین می‌شود. به این ترتیب، طول خط جایگزین  $\frac{1}{4}$  یعنی دو برابر قطعه اولیه است و به همین روال هر بار طول خط دو برابر طول پیشین آن می‌شود؛ لذا پس از  $k$  گام، طول آن  $2^k$  خواهد بود که متشکل است از  $8^k$  قسمت، هر قسمت به اندازه  $1/4^k$ . اگر طول خط را با

$L$  و اندازه هر قسمت را با  $l$  نشان دهیم، پس از  $k$  گام:

$$L = 2^k \quad (38)$$

$$l = 1/4^k \quad (39)$$

اکنون می‌توان نمایش لگاریتم طول (در این مورد ترجیحاً در مبنای ۴) را، یعنی  $\log_4 L$  در مقابل لگاریتم اندازه،  $(1/l)$ ، ترسیم نمود. چنانکه در شکل شماره ۹ مشاهده

می‌شود، خط راستی که از این نقاط می‌گذرد، دارای شیب  $d = 0/5$  است. بنابراین با افزودن واحد به آن، طبق رابطه (۳۵)، مقدار زیر به دست خواهد آمد:

$$D = 1 + d = 1 + 0/5 = 1/5 \quad (40)$$

یعنی بعد خود همانندی (بعد فراکتالی) برابر  $1/5$  است و این همان عددی است که قبلاً در رابطه (۳۶) محاسبه گردیده است و نیز در شکل شماره ۹ قابل ملاحظه است که می‌توان نوشت:

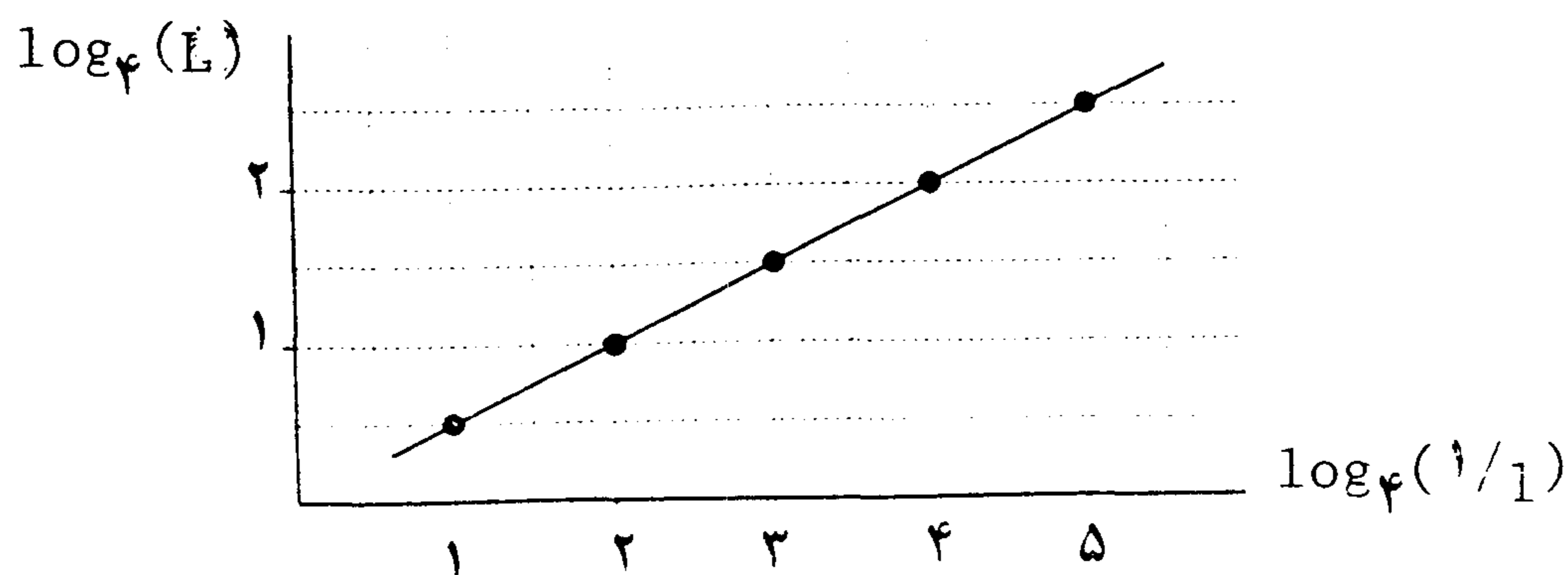
$$\log_4 L = 0/5 \log_4 (1/1) \quad (41)$$

یا به عبارت دیگر:

$$L = \sqrt[1/5]{1/1} = 1/1^{0/5} \quad (42)$$

رابطه (۴۲) یک رابطه توانی از  $L$  را بر حسب  $1/1$  ارائه می‌نماید. (۱۳۸ و ۱۳۹)

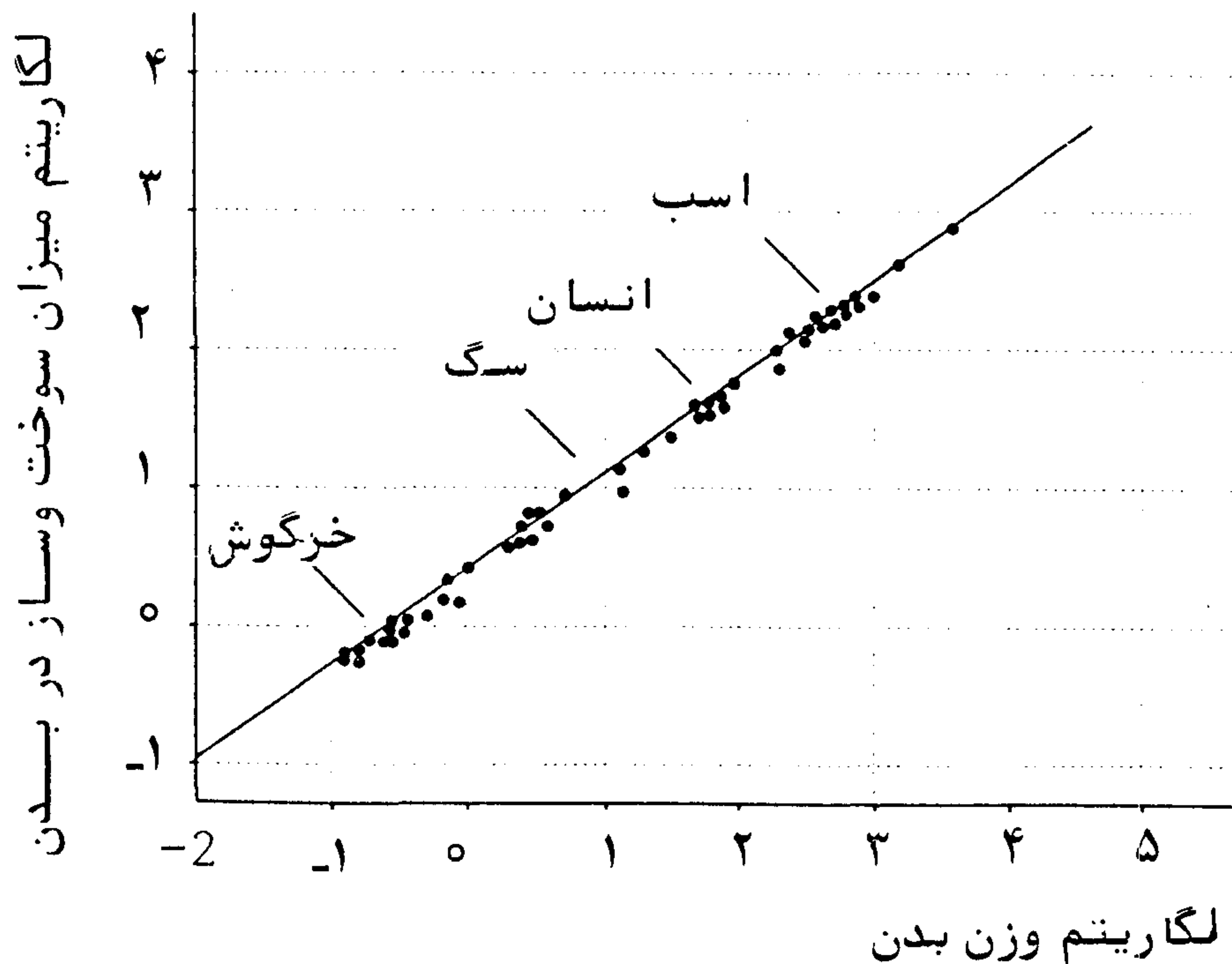
در ادامه این مبحث و برای تبیین اهمیت بهره‌گیری از نظریه فراکتالی در مدل‌سازی تحولات و پدیده‌های رشد و توسعه و نیز به منظور تبیین ماهیت فراکتالی سازواره‌ها و تحولات برخه‌ای در آنها، می‌توان ارتباط میزان سوخت و ساز را در جانوران مختلف با وزن آنها مورد مطالعه قرار داد.



شکل شماره ۹ - نمایش تغییرات لگاریتم طول فراکتال موجود در شکل ۲ (ب) در ازای لگاریتم اندازه (مقیاس)

شکل شماره ۱۰، لگاریتم میزان سوخت و ساز را در بدن اسب، انسان، سگ و خرگوش، با لگاریتم وزن بدن هر یک، به نمایش می‌گذارد. (۱۴۰) در این نمودار، میزان سوخت و ساز بر حسب ژول بر ثانیه و وزن بر حسب کیلوگرم است. چنانچه میزان سوخت و ساز با  $R$  و





شکل شماره ۱۰ - نمایش تغییرات لگاریتم میزان سوخت و ساز در بدن جانوران در مقابل لگاریتم وزن بدن

وزن بدن جانور با  $M$  نشان داده شود، با توجه به شکل شماره ۱۰، معادله خط راستی که از نقاط می‌گذرد، به صورت زیر خواهد بود:

$$\log R = a \log M + \log k \quad (43)$$

در رابطه فوق  $a$  (شیب خط) و  $\log k$  (نقطه تقاطع با محور قائم) مقادیر ثابتی هستند و رابطه (۴۳) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$R = KM^a \quad (44)$$

شیب خط در شکل شماره ۱۰، تقریباً  $0/75$  است ( $a \approx 0/75$ ) و از آنجا که وزن یا جرم با حجم بدن متناسب است، اگر مقیاس طول،  $m$  باشد، رابطه (۴۳) را بر حسب حجم ( $m^3$ )، می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$R = K' m^{3a} = k' m^{2/25} \quad (45)$$

که  $k'$  یک ضریب تناسب و مقدار ثابتی است. ممکن است بدواً چنین انتظار رود که میزان سوخت و ساز در بدن با حجم بدن یعنی  $m^3$  متناسب باشد، لیکن آن گونه که ملاحظه

می‌گردد، چنین نیست؛ میزان سوخت و ساز در یک سطح فراکتالی با بعد  $2/25$  تغییر می‌نماید. برای این واقعیت، معمولاً، دلایل متعددی برشمرده می‌شود؛ از جمله آن که بدن جانور، جسمی منسجم و توپر نیست، بلکه از سطوحی بسیار در هم پیچیده، امعاء و احشاء، قسمت‌های مجوف، و نهایتاً سطوح فراکتالی تشکیل یافته است. بنابراین مدل‌سازی فراکتالی می‌تواند انسجام سازواره‌ها را نیز مبرهن نماید. (۱۴۱ و ۱۴۲)

### نتیجه‌گیری

در این مقاله، ملاحظه گردید که برای دگرگونی‌ها، تحولات و پدیده‌های رشد و توسعه، می‌توان از نظریه فراکتالی در مدل‌سازی بهره‌گرفت. اتخاذ چنین روشی در مطالعه سیستم‌های پویا، می‌تواند در درک و دریافت نحوه تکوین، رشد و حیات پدیده‌ها، واقعیت‌های وجودی و انکشاف قانون‌مندی‌های حاکم بر آنها، مؤثر واقع گردد. این شیوه نوین در بسیاری از پژوهش‌های علمی و بویژه در مطالعه سیستم‌های طبیعی و سازواره‌ها به کار گرفته شده و به نتایج جالب توجه منجر گردیده است. از آنجا که سازمان‌ها، سیستم‌های انسانی و مدیریتی نیز همچون سازواره‌ها و سیستم‌های طبیعی از خصالت‌های رشد و توسعه و اوصاف حیاتی برخوردار هستند و معمولاً چنین نگرش‌هایی در مطالعه و بررسی سیستم‌های سازمانی و مدیریتی به کار گرفته می‌شود، (۱۴۳ و ۱۴۴) بهره‌جویی از نظریه فراکتالی در پژوهش‌های مدیریتی می‌تواند ابزار توانمندی را در اختیار پژوهشگران مدیریت قرار دهد و نیز معیارهای کمی را برای سنجش‌ها و شاخص‌های مدیریتی در ارزیابی و مقایسه فرایندهای رشد و توسعه، استحکام و انسجام سازمان‌ها، شبیه‌سازی، تصمیم‌گیری و مانند اینها فراهم آورد.

### منابع و ماخذ

- 1- Peitgen, H. O., Jurgens, H. and Saupe, D. (1993), "Chaos and Fractals, New Frontiers of Science", Springer - Verlag.
- 2- Ibid., Peitgen, H. O., et al (1993).

- 3- Lasota, A. and Mackey, M. C., (1994), "**Chaos, Fractals and Noise, Stochastic Aspects of Dynamics**", Springer - Verlag.
- 4- **Ibid.**
- 5- **Ibid.**, Peitgen, H. O., et al (1993).
- 6- Schroeder, M. (1991), "**Fractal, Chaos and Power Laws**", Freeman Publishers.
- 7- Abraham, R. H., and Shaw, C. D. (1992), "**Dynamics, The Geometry of Behaviour**", Addison - Wesley.
- 8- Bransley, M. (1988), "**Fractals Everywhere**," Academic Press.
- 9- Crilly, A. J., Earnshaw, R. A., and Jones, H., (1991), "**Fractals and Chaos**," Springer - Verlag.
- 10- Devaney, R. L., (1990), "**Chaos, Fractals, and Dynamics**," Addison - Wesley.
- 11- **Ibid.**, Peitgen, H. O., et al (1993).
- 12- Belair, J. and Dubuc, S. (1991), "**Fractal Geometry and Analysis**," Kluwer Publishers.
- 13- **Ibid.**
- 14- **Ibid.**, Peitgen, H. O., et al (1993).
- 15- Mandelbrot, B. B., (1985), "**Self - Affine Fractals and Fractal Dimensions**," Physica Scripta, 32.
- 16- Mandelbrot, B. B., (1977), "**Fractals: Form, Chance, and Dimension**," Freeman and Co.,
- 17- Stanley, H. E., Meakin, P. (1988), "**Multifractal Phenomena in Physics and Chemistry**," Nature, 335.
- 18- Smith, A. R., (1984), "**Plants, Fractals, and Formal Languages**," Computer

- Graphics, 18.
- 19- Wilson, S. (1984), "Cellular Automata Can Generate Fractals," *discrete Applied Math.*, 8.
- 20- Sernetz, M., Gelleri, B., and Hofman, F. (1985), "The Organism as a Bioreactor, Interpretation of the Reduction Law of Metabolism in Terms of Heterogeneous Catalysis and Fractal Structure," **Journal of Theoretical Biology.**
- 21- Crilly, A. J., Earnshaw, R. A. and Jones, H. (1991), "Fractals and Chaos," **Spring - Verlag.**
- 22- Peitgen, H. O., Henriques, J. M. and Peneda, L. F., (1991), "Fractals in The Fundamental and Applied Sciences," North - Holland.
- 23- West, B., (1990), "Fractal Physiology and Chaos in Medicine," World Scientific.
- 24- Mandelbrot, B. B., (1982), "The Fractal Geometry of Nature," Freeman and Co.
- 25- Ibid., Peitgen, H. O., et al (1991).
- 26- Lovejoy, S. and Mandelbrot, B. B., (1985), "Fractal Properties of Rain, and a Fractal Model," *Tellus* 37A.
- 27- Mandelbrot, B. B., and Evertsz, C. J. G., (1990), "The Potential Distribution Around Growing Fractal Clusters," *Nature*, 348.
- 28- Prusinkiewicz, P., Lindenmayer, A., and Hanan, J. (1988), "Developmental Models of Herbaceous Plants for Computer Imagery Purposes," *Computer Graphics.*, 22.
- 29- Aharony, A. (1991), "Fractal Growth," in: Bunde, A. And Havlin, S., (eds.), "Fractals Disordered Systems," Springer - Verlag.

- 
- 30- Ibid., Mandelbrot, B. B., and Evertsz, C. J. G., (1990).
  - 31- Procaccia, I. and Zeitak, R., (1988), "Shape of Fractal Growth Patterns: Exactly Solvable Models and Stability Considerations," *Phys. Rev. Lett.*, 60.
  - 32- Smith, L. B., and Thelen, E., (1993), eds., "A Dynamic Systems Approach to Development: Applications," MIT Press.
  - 33- Van Geert, P. (1994), "Dynamics of Development," In Port, R. and Van Gelder, T., (eds), "Mind as Motion," MIT Press.
  - 34- Ibid., Schroeder, M. (1991).
  - 35- Gleick, J., (1987), "Chaos: Making a New Science," Viking Penguin.
  - 36- Feigenbaum, M., (198), "Universal Behaviour in Nonlinear Systems," Los Alamos Science Publishers.
  - 37- Drucker, P. (1980), "Managing in Turbulent Times," Harper and Row Publishers.
  - 38- Liefer, R., (1989), "Understanding Organizational Transformation Using a Dissipative Structure Model," *Human Relations*, 42.
  - 39- Ibidl, Peitgen, H. O., et al (1993).
  - 40- Hutchinson, J., (1981), "Fractals and Self - Similarity," *Indiana University Journal of Mathematics*, 30.
  - 41- Hata, M., (1985), "On The Structure of Self - Similar Sets," *Japan Journal of Applied Mathematics*.
  - 42- Ibid.
  - 43- Ibid., Hutchinson, J., (1981).
  - 44- Cherbit, G., (1991), "Fractals, Non - Integral Dimensions and Application," John Wiley & Sons.
  - 45- Ibid.

- 
- 46- Ibid., Mandelbrot, B. B., (1982).
- 47- Ibid.
- 48- Edgar, G., (1990), "Measures, Topology and Fractal Germany," Springer - Verlag.
- 49- Ibid., Brilair, J., and Dubuc, S., (1991).
- 50- Ibid., Cherbit., G., (1991).
- 51- Jullien, R., and Botet, R. (1987), "Aggregation and Aggregates," World Scientific
- 52- Pynn, R., and Skjeltrop, A., (1986), "Scaling Phenomena in Disordered Systems," NATO AST Series B133, Plenum Press.
- 53- Ibid., Lasota, A. and Mackey, M. C., (1994).
- 54- Ibid.
- 55- Ibid., Peitgen, H. O., et al (1993).
- 56- Mandelbrot, B. B., and Van Ness, J. W., (1968), "Fractional Brownian Motion, Fractional Noises and Application," SIAM Review, 10.
- 57- Ibid., Mandelbrot, B. B., (1982).
- 58- Ibid.
- 59- Voss, R. F., (1985), "Random Forgeries," in Earnshaw, ed., "Fundamental Algorithms for Graphics," Springer - Verlag.
- 60- Ibid., Pynn, R. and Skjeltrop, A., (1986).
- 61- Ibid., Mandelbrot, B. B., (1982).
- 62- Ibid.
- 63- Mandelbrot, B. B., (1984), "Fractals in Physics: Squig Clusters, Diffusions, Fractal Measures, and The Unicity of Fractal Dimensionality," J. Stat, Phys, 34.

- 
- 64- Ibid., Voss, R. F., (1985).
- 65- Ibid.
- 66- Ibid., Mandelbrot, B. B., (1982).
- 67- Ibid., Mandelbrot, B. B., (1984).
- 68- Ibid., Peitgen, H. O., et al (1993).
- 69- Priestly, M. B., (1981), "Spectral Analysis and Time Series," Vol. 1, "Univariate Series," Academic Press.
- 70- Ibid.
- 71- Coulon, F., (1986), "Signal Theory and Processing," Artech House Pub.
- 72- Ibid., Priestly, M. B., (1981).
- 73- Ibid., Coulon, F., (1986).
- 74- Robinson, F. N. H., (1974), "Noise and Fluctuationa," Clarendon Press.
- 75- Voss, R. F., (1979), "1/f (Flicker) Noise: A brief Review," Proc. 32nd Annual Symposium on Frequency Control," Atlantic City.
- 76- Mandelbrot, B. B., and Wallis, J. R., (1969), "Some Long - Run Properties of Geophysical Records," Water Resources Research.
- 77- Musha, T., and Higuchi, H., (1976), "The 1/f Fluctuation of a Traffic Current on an Expressway," Jap., J., Appl. Phys., 15.
- 78- Gardner, M., (1978), "White and Brown Music, Fractal Curves, and One - Over - f Noise," Scientific American, April 1978.
- 79- Voss, R. F., and Clarke, J., (1978), "1/f Noise in Music and Speech," Nature.
- 80- Voss, R. F., and Clarke, J., (1978), "1/f Noise in Music: Music From 1/f Noise," J. Acous. Soc Am.
- 81- Reif, F., (1965), "Fundamentals of Statistical and Thermal Physics," Mc

- 
- Graw - Hill.
- 82- Ibid., Mandelbrot, B. B., (1982).
- 83- Ibid., Peiten, H. O., et al (1993).
- 84- Ibid., Voss, R. F., (1985).
- 85- Mandelbrot, B. B., (1985), "Self - Affine Fractals and Fractal Dimension,"  
Physica - Scripta.
- 86- Ibid., Mandelbrot, B. B., (1984).
- 87- Ibid., Mandelbrot, B. B., (1982).
- 88- Pietronero, L. and tosatti (1986), "Fractal in Physics," Elsevier.
- 89- Ibid.
- 90- Ibid., Peitgen, H. O., et al (1993).
- 91- Richardson, G. P., and Pugh, A. L., (1981), "Introduction to System  
Dynamics, Modelling With Dynamo," MIT Press.
- 92- Goodman, M. R., (1976), "Study Notes in System Dynamics," Wright -  
Allen Press.
- 93- Forrester, J., (1966), "Market Growth as Influenced by Capital  
Investment," Industrial Management Review, IX, 2.
- 94- Ibid., Van Geert, P., (1994).
- 95- Ibid., Smith, L. B., and Thelen, E., (1993).
- 96- Lindenmayer, A., (1968), "Mathematical Models for Cellular Interaction  
in Development," **Journal of Theoretical Biology.**
- 97- Musgrave, K., Kolb, C., and Mace, R., (1988), "The Synthesis and the  
Rendering of Erodal Fractal Terrain," SIGGRAPH'98, Computer Graphics  
24.
- 98- Prusinkiewicz, P., and Hanan, J., (1988), Applications of L - Systems to



- 
- Computer Imagery," in Ehrig, H., Nagl, M. Rosenfeld, A., and Rozenberg, G. (eds.), "Graph Grammars and Their Application to Computer Science, Third International Workshop," Springer - Verlag.
- 99- D'Arcy Thompson (1942), "On Growth and Form," Cambridge University Press.
- 100- Ibid., Lindenmayer, A., (1968).
- 101- Lindenmayer, A. and Rozenberg, G., (1975), "Automata, Languages, Development," North - Holland.
- 102- Ibid.
- 103- Ibid., Prusinkiewicz, P. and Hanan, J., (1988).
- 104- Mitchinson, G. J., and Wilcox, M., (1972), "Rule Governing Cell Division in Anabaena," Nature, 239.
- 105- Prusinkiewicz, P., and Lindenmayer, A., (1990), "The Algorithmic Beauty of Plants," Springer - Verlag.
- 106- Ibid., Prusinkiewicz P., Lindenmayer, A. and Hanan, J., (1988).
- 107- Ibid., Smith, A. R., (1984).
- 108- Bedford, T., (1986), "Dynamics and Dimension for Fractal Recurrent Sets," Journal of London Math. Soc, 33.
- 109- Prusinkiewicz, P., and Hanan, J., (1989), "Lindenmayer Systems, Fractals and Plants," Vol. 79 fo Lecture Notes on Biomathematics, Springer - Verlag.
- 110- Dekking, F. M., (1982), "Recurrent Sets," Advances in Mathematics, 44,10.
- 111- Wolfram, S., (1986), "Theory and Application of Cellular Automata," World Scientific.

- 
- 112- Toffoli, T., and Margolus, N., (1987), "Cellular Automata Machines: A New Environment For Modelling," MIT Press.
- 113- Ibid., Prusinkiewicz, P., and Hanan, J., (1989).
- 114- Ibid., Prusinkiewicz, P., and Lindenmayer, A., (1990).
- 115- Ibid., Schroeder, M., (1991).
- 116- Ibid., Abraham, R. H., and Shaw, C. D., (1992).
- 117- Ibid., Bransley, M., (1988).
- 118- Ibid., Devanery, R. L., (1990).
- 119- Ibid., Peitgen, H. O., et al (1993).
- 120- Ibid., Sernetz, M., et al (1985).
- 121- Ibid., Peitgen, H. O., et al (1991).
- 122- Ibid., West, B., (1990).
- 123- Ibid., Mandelbrot, B. B., (1982).
- 124- Ibid., Aharony, A., (1991).
- 125- Ibid., Procaccia, I., and Zeitak, R., (1988).
- 126- Ibid., Smith, L. B. and Thelen, E., (1993).
- 127- Ibid., Van Geert, P., (1994).
- 128- Bak, P., and Chen, K., (1991), "Self - Organizing Criticality," Scientific American, 256, 10.
- 129- Ibid., Schroeder, M., (1991).
- 130- Ibid.
- 131- Ibid., Smith, L. B. and Thelen, E., (1993).
- 132- Ibid., Van Geert, P., (1994).
- 133- Ibid., Peitgen, H. O., et al (1993).
- 134- Garfunkel, S., and Steen, L. A., (1988), "For All Practical Purposes," W.