زنجیره‌های مارکوف در مدیریت

MARKOV CHAINS
IN MANAGEMENT

رضا راعی

مقدمه

گاهی اوقات یک پُست خاص در یک سازمان باکمبود نیروی انسانی روبرو می‌شود، در حالی که همین پست در زمانهای دیگر با تورم نیرو روبرو بوده است. موجودی انبار سازمانها نیز بعضی اوقات به صفر می‌رسد و به توقف خط تولید منجر می‌شود در صورتی که در اوقات دیگر موجودی انبار بسیار زیاد است، و یا با خراب شدن ماشینی ملاحظه می‌شود که شرکت هزینه‌های زیادی را بابت تعمیرات و نگهداری و کاهش تولیدمتحمل می‌شود، همچنین فروش سازمانهاگاهی اوقات کمتر از تولید بوده و زمانی هم تقاضا برای محصولاتشان بیش از تولید بوده است.

ملاحظه می‌شود که اغلب سازمانها با چنین مشکلاتی روبرو هستند. چگونه می‌توان سیاستهایی را برگزید که رویارویی با چنین مسائلی را به حداقل ممکن رساند. یکی از الگوهایی که در این موارد به یاری سازمانها می‌شتابد، زنجیره‌های مارکوف است که به عنوان یکی از فرایندهای تصادفی در مدیریت مطرح است.

در سیستم نیروی انسانی سازمان یک فرد در سالها (زمانها)ی پی در پی ممکن است در پستهای گوناگونی قرار گیرد و گاهی اوقات یک پست باکمبود نیرو یا مازاد نیرو روبرو خواهد بود که زنجیره‌های مارکوف می‌تواند موجودی نیروی انسانی هر پست را در زمان آینده بطور احتمالی بر اساس روند گذشته نشان داده، سازمان را از موقعیت احتمالی خود در آینده از لحاظ نیروی انسانی باخبر کند تا بتواند تعدیلات لازم را در مورد مازادها و کمبودها انجام دهد. در اینجا ویژگی و مشخصه (پارامتر) مورد بررسی سیستم نیروی انسانی، تعداد نیروی موجود است که به عنوان یک فرایند تصادفی مورد نظر است.

میزان موجودی انبار در یک سیستم انبارداری در هر لحظه‌ای از زمان ممکن است متفاوت باشد. زنجیره‌های مارکوف میزان موجودی در هر لحظه‌ای از زمان را به عنوان پارامتر مورد نظر در سیستم بررسی کرده و سطح موجودی احتمالی را برآورد می‌کند و هادی سازمانها برای نگهداری موجودی در سطح بهینه است.

زنجیره‌های مارکوف پیش بینی می‌کند که یک ماشین در خط تولید، احتمالاً در آینده در چه وضعیتی خواهد بود و بنا بر هزینه‌های مختلف بهترین سیاست تعمیر و نگهداری چیست؟

میزان فروش یک سازمان در آینده بر اساس زنجیره‌های مارکوف قابل پیش بینی است تا بتوان تولیدی متناسب با فروش داشت.

فرایندهای تصادفی[1]

یک فرایند تصادفی به عنوان یک مجموعهٔ متغیرهای تصادفی $[X_t]$ تعریف می‌شود که شاخص T که غالباً معرف زمان است، در سرتاسر مجموعهٔ خاص T وجود دارد. غالباً T مجموعه اعداد صحیح غیر منفی است، و X_t یک مشخصهٔ قابل اندازه‌گیری در زمان T را بیان می‌کند. برای مثال، فرایند تصادفی $X_1, X_2, X_3, \ldots$ می‌تواند بیانگر مجموعهٔ سطوح موجودی هفتگی (ماهانهٔ)

محصول، فروش، نیروی انسانی موجود سالانه (فصلی) به ترتیب برای زمانهای ... و ۳ و ۲ و ۱ باشد.

بررسی حرکت یک سیستم که برای دوره‌های زمانی پی در پی عمل می‌کند، غالباً به تجزیه و تحلیل یک فرایند تصادفی با ساختار تصادفی خاص منجر می‌شود. بدیهی است هنگامی که یک سیستم مورد بررسی قرار می‌گیرد، حالتهای آن سیستم در زمانهای متوالی یکسان نخواهد بود و یک سیستم در زمان t در حالت X_t به سر می‌برد. در فرایندهای تصادفی، هر سیستم تنها از یک جنبه یا یک مشخصه مورد بررسی قرار می‌گیرد. زمان t در نقاط خاص با ... و ۲ و ۱ و ۰ مشخص می‌شود که سیستم دقیقاً در هر یک از این نقاط در حالتی منحصر به فرد قرار می‌گیرد. نقاط زمانی ممکن است با فاصله یکسان از یکدیگر باشند یا اینکه ممکن است فاصلهٔ آنها با توجه به حرکت کلی سیستم که فرایند تصادفی در آن محاط شده است، متغیر باشد. گر چه ممکن است هر یک از حالتها حکایت از یک ویژگی کیفیتی مثل خوب یا بد بکند اما با نمادهای ... و ۲ و ۱ ۰ نمایش داده می‌شوند. بنابراین توصیف ریاضی سیستم فیزیکی یک فرایند تصادفی به صورت $[X_t]$ است که متغیرهای تصادفی در زمان ... و ۲ و ۱ و ۰ = t مشاهده می‌شوند و هر متغیر تصادفی ممکن است یکی از $(M+1)$ عدد صحیح M و ... و ۲ و ۱ و ۰ حالت ممکن باشد.[2]

زنجیره‌های مارکوف[3]

فرایند تصادفی $X=[X_t , t\in N]$ یک زنجیره مارکوف نامیده می‌شود اگر برای هر $t\in N$ و $j\in E$، شرط زیر صادق باشد که در آن E یک مجموعه قابل شمارش است:

$$P[X_{t+1}=j\,|\,X_0,X_1,\ldots X_t] = P[X_{t+1}=j\,|\,X_t]$$

عبارت فوق بیانگر احتمال وجود سیستم در زمان $t+1$ در حالت j است به شرط اینکه در زمان t حالت سیستم مشخص و حالتهای رخ داده قبلی مشخص باشد. بنابراین یک زنجیره مارکوف، یک رشته از متغیرهای تصادفی برای t است. در این مورد گفته می‌شود که فرایند با توجه به حالتی که در زمان t دارد، در زمان $t+1$ در حالت j خواهد بود[4].

در واقع خاصیت مارکوفی با حالت احتمال شرطی هر «پیشامد» آینده بر اساس «پیشامد» فعلی یکسان است، و حالت آینده $X_{t+1}=j$ از پیشامدهای قبلی مستقل است و فرایند فقط به حالت فعلی سیستم بستگی دارد.

احتمال شرطی $P[X_{t+1}=j\,|\,X_t=i] = P_{ij}$ برای $i , j \in E$ احتمال انتقال[5] سیستم از حالت i به j نامیده می‌شود. معمولاً P_{ij}ها را با توجه به حالتهای یک سیستم با یک آرایش مربعی مرتب می‌کنند و نتیجهٔ آن ماتریس مربع P است که ماتریس انتقال[6] زنجیره مارکوف X نامیده می‌شود.

حالتها   حالتها

$$P=\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc}0 & 1 & 2 & & n\end{array} \\ \begin{array}{c}0\\1\\2\\\vdots\\n\end{array} & \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & \ldots & P_{0n} \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & \ldots & P_{1n} \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} & \ldots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{n0} & P_{n1} & P_{n2} & \ldots & P_{nn} \end{bmatrix}\end{array}$$

در ماتریس P، الف) برای هر $i,j\in E$، $P_{ij}\geq 0$ است و

ب) برای هر $i\in E$، $\sum_{j=0}^{n} P_{ij}=1$ است.

ماتریس انتقال یک زنجیره، ماتریس مارکوف نیز نامیده می‌شود. مورد الف بیانگر این است که احتمال ورود سیستم از حالت i به حالت j بزرگتر یا مساوی صفر است و مورد ب بیان می‌کند که مجموع احتمالات هر سطر باید مساوی یک باشد چون یک سیستم به احتمال صددرصد در یکی از مجموعه حالتهای ممکن در هر لحظه‌ای از زمان خواهد بود، و اگر مجموع احتمالات هر ستون نیز برابر یک باشد، آن را ماتریس انتقال مضاعف گویند.

بطور خلاصه یک فرایند تصادفی $[X_t]$ و $(t = 0,1,\ldots)$ یک زنجیره مارکوف نامیده می‌شود. اگر موارد زیر صادق باشد[7]:

۱- وجود تعداد محدودی از حالتها.

۲- داشتن خاصیت مارکوفی (صدق احتمالات شرطی).
۳- وجود احتمالات انتقال پایدار، هر سیستم پس از مدت طولانی به سمت احتمالات انتقال پایدار میل می‌کند.
۴- وجود یک مجموعه احتمالات اولیه $P[X_0=i]$ برای هر i (داشتن ماتریس انتقال اولیه).

معادله چپ من - کلموگورف[8]

$P_{ij}^{(n)}$ احتمال انتقال سیستم از حالت i به حالت j در مرحله nام است. معادلهٔ چپ من - کلموگورف یک روش برای محاسبه این احتمال انتقال در مرحله n است:

برای هر n,j,i، $0\le V\le n$ و $P_{ij}^{(n)}=\sum_{k=0}^{M} P_{ik}^{(V)}\ P_{kj}^{(n-v)}$

این معادله صرفاً خاطرنشان می‌کند که فرایند برای رفتن از حالت i به j در n مرحله، دقیقاً بعد از V مرحله (که V مرحله‌ای قبل از مرحلهٔ n است) در حالت K خواهد بود. بنابراین: $P_{ik}^{V}\ P_{kj}^{(n-v)}$ همان احتمال شرطی است که فرایند با شروع حالت i بعد از V مرحله به حالت K می‌رسد و پس از n-v مرحله به حالت j می‌رود[9].

در واقع محاسبه $P_{ij}^{(n)}$ برای محاسبه ماتریس P^n یعنی ماتریس انتقال مرحلهٔ n بکار می‌رود و برای به دست آوردن P^n، ماتریس P، n بار در خودش ضرب می‌شود و P_{ij} در ماتریس p^n همان $P_{ij}^{(n)}$ خواهد بود.

دسته‌بندی حالتها در زنجیره‌های مارکوف

فرض کنید X یک زنجیره مارکوف با فضای حالت E و ماتریس انتقال P باشد و T زمان اولین ملاقات سیستم با حالت j باشد؛ یعنی در آینده اولین باری که سیستم در حالت j خواهد بود زمان T است.

حالت j بازگشتی[10] نامیده میشود اگر $P_j[T<\infty]=1$ باشد، در واقع اگر سیستم صددرصد بتواند مجدداً به حالت j برگردد حتی در بلند مدت حالت j بازگشتی است. در غیر این صورت اگر $P_j[T=\infty]\ge 0$ باشد، j ناپایدار[11] نامیده می‌شود، یعنی احتمال بازگشت سیستم به حالت j وجود دارد ولی صددرصد نیست[12].

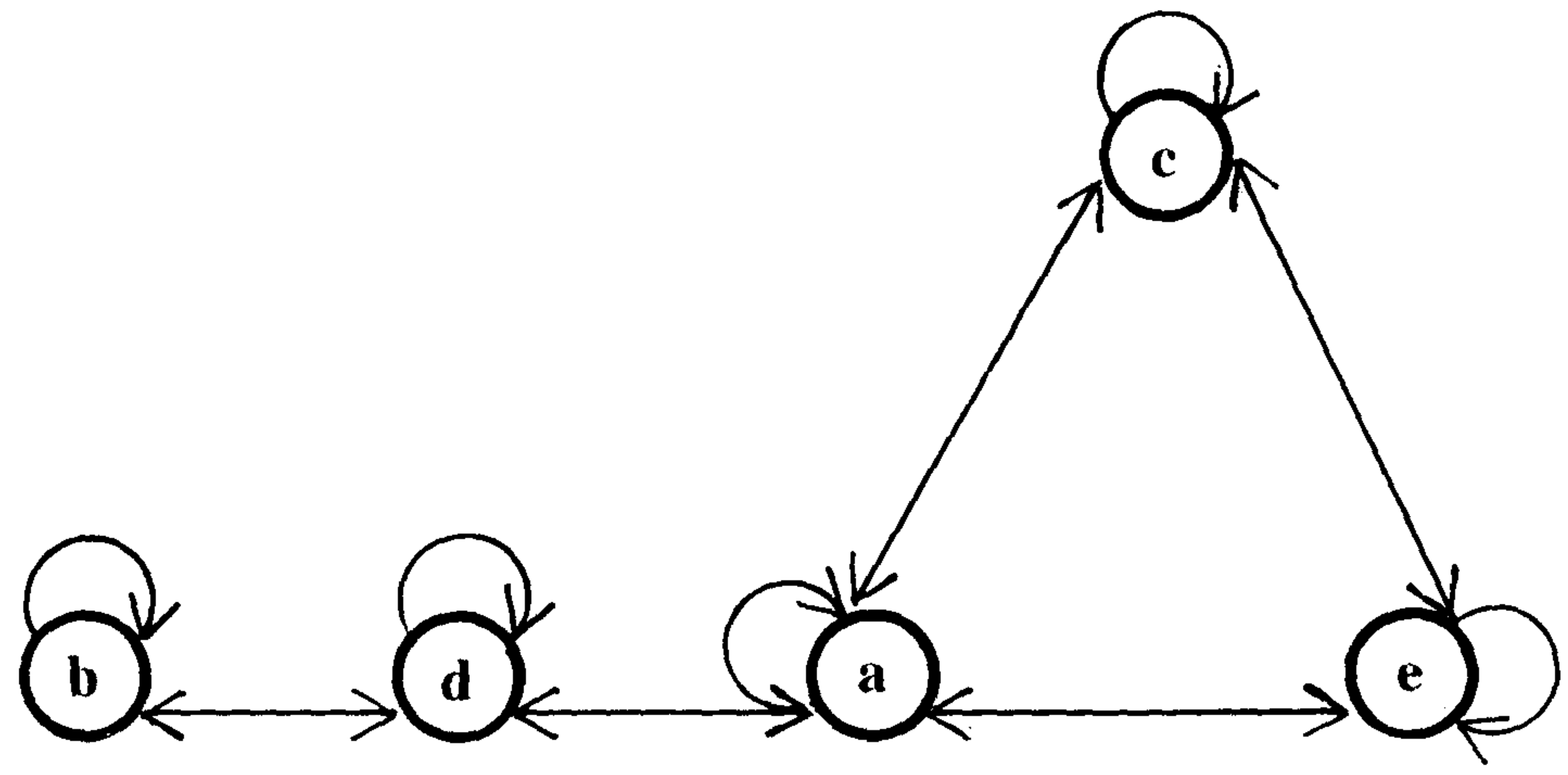
یک حالت بازگشتی j متناوب[13] با دورهٔ تناوب[14] σ نامیده می‌شود اگر $\sigma\ge 2$ به عنوان بزرگترین عدد صحیح در شرط زیر صادق باشد[15]:

$P_j[T=n\sigma, \sigma\ge 1$, برای بعضی σها $]=1$

یعنی بازگشت سیستم به حالت j بطور متناوب با فاصله‌های زمانی یکسان بزرگتر از ۱ خواهد بود. به عبارت دیگر، گفته می‌شود حالت j دارای دورهٔ تناوب σ $(\sigma>1)$ است که $P_{jj}^{(n)}$-0 باشد، در حالی که n به J قابل تقسیم نباشد، و σ کوچکترین عددی باشد که دارای این خاصیت است، برای مثال، احتمال دارد که فرایند در زمان ...و۴ و ۳ و ۲ و ۰ به حالت J برسد، در این صورت این سیستم با فاصلهٔ زمانی متناوب ۲ به حالت j می‌رسد پس حالت j دارای دورهٔ تناوب ۲ است. اگر دو عدد متوالی s و (s+۱) به قسمی وجود داشته باشند که فرایند در حالتهای s و (s+۱) در حالت j باشد، گفته می‌شود که حالت دارای دورهٔ تناوب ۱ است و یک حالت غیر متناوب[16] است، در حقیقت اگر $J\ge 2$ نباشد، j را غیر متناوب گویند[17].

اگر حالت j از حالت i قابل حصول، و حالت i نیز از حالت j قابل حصول باشد، آنگاه به حالت i و j تعاملی[18] گفته می‌شود. بطور کلی (الف) هر حالت با خودش تعامل می‌کند هنگامی که $P_{ii}^{(0)}=P[X_1=i|X_0=i]=1$ باشد، (ب) اگر حالت i با حالت j در تعامل باشد، آنگاه حالت j با حالت i در تعامل است و همچنین (ج) اگر حالت i با حالت j و حالت j با حالت k در تعامل باشد، آنگاه حالت i با حالت k در تعامل است.[19]
اگر حالت j از حالت i حاصل شده باشد به صورت $i\rightarrow j$ نوشته می‌شود.

اگر خارج از یک مجموعه از حالتهای یک سیستم هیچ حالت دیگری وجود نداشته باشد آن را یک مجموعه بسته می‌گویند[20] به عبارتی اگر سیستم وارد آن مجموعه حالتها شد دیگر از آن مجموعه خارج نمی‌شود؛ مثلاً در شکل شماره ۱ مجموعه‌های {a,c,e} و {a,b,c,d,e} بسته هستند.[21]



شکل شماره ۱، گراف انتقال زنجیره مارکوف ماتریس انتقال زیر است که فضای حالت آن $E=\{a,b,c,d,e\}$ است:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\
\text{حالت} & \\
P = \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} &
\begin{bmatrix}
\frac{۱}{۲} & ۰ & \frac{۱}{۲} & ۰ & ۰ \\
۰ & \frac{۱}{۴} & ۰ & \frac{۳}{۴} & ۰ \\
۰ & ۰ & \frac{۱}{۳} & ۰ & \frac{۲}{۳} \\
\frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۲} & ۰ & \frac{۱}{۴} & ۰ \\
\frac{۱}{۳} & ۰ & \frac{۱}{۳} & ۰ & \frac{۱}{۲}
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

در شکل شماره ۱ دایره‌ها بیانگر حالتهاست و پیکانها در صورتی که $P_{ij}>0$ باشد، رسم می‌شوند. با حذف سطر و ستون دوم و چهارم، ماتریس زیر به دست می‌آید که بیانگر مجموعهٔ بسته $\{a,c,e\}$ است:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} a & c & e \end{array} \\
Q = \begin{array}{c} a \\ c \\ e \end{array} &
\begin{bmatrix}
\frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} & ۰ \\
۰ & \frac{۱}{۳} & \frac{۲}{۳} \\
\frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳}
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

اگر ماتریس انتقال P با تجدید نظر و ترتیب جدید نوشته شود، ماتریس P زیر حاصل می‌شود که تجزیه و تحلیل را راحت‌تر می‌سازد:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} a & c & e & b & d \end{array} \\
P = \begin{array}{c} a \\ c \\ e \\ b \\ d \end{array} &
\left[\begin{array}{ccc|cc}
\frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} & ۰ & ۰ & ۰ \\
۰ & \frac{۱}{۳} & \frac{۲}{۳} & ۰ & ۰ \\
\frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} & ۰ & ۰ \\
\hline
۰ & ۰ & ۰ & \frac{۱}{۴} & \frac{۳}{۴} \\
\frac{۱}{۴} & ۰ & ۰ & \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۴}
\end{array}\right]
\end{array}
$$

بدین ترتیب حالتهای a,c,e بازگشتی غیر متناوب و حالتهای d و b ناپایدارند.

یک مجموعهٔ بسته را که هیچ زیر مجموعهٔ بسته مناسبی نداشته باشد، یک مجموعه تفکیک ناپذیر[۲۲] گویند. اگر یک زنجیره مارکوف تنها یک مجموعه بسته باشد آن را زنجیره مارکوف تفکیک ناپذیر گویند. در مثال قبل تمام زنجیره تفکیک ناپذیر نیست چون خود دارای یک زیر مجموعه بسته است اما مجموعهٔ $\{a,c,e,\}$ یک مجموعهٔ بسته تفکیک ناپذیر است.

اگر در یک مجموعهٔ بسته یک حالت از خودش حاصل شود آن را یک حالت جاذب گویند[۲۳]. اگر احتمال ورود یک سیستم از حالت i به حالت i یعنی به خودش یک باشد آن حالت جاذب است چون با ورود فرایند به حالت مذکور، فرایند دیگر از آن خارج نخواهد شد و این حالت فرایند را جذب خواهد نمود، به عبارت دیگر، اگر احتمال ابقای حالتی P_{ii}، یک باشد، حالت i جاذب خواهد بود.

چگونه احتمالات حالت در زمان تغییر می‌کند؟

در زمانهای متفاوت احتمالات برای حالتها در زنجیره‌های مارکوف متفاوت است؛ یعنی احتمال برای رخ دادن حالت خاصی در زمانهای n و n+1 یکسان نیست.

احتمال اینکه فرایند در زمان اولیه در هر یک از حالتها باشد مشخص است. برای به دست آوردن احتمالات حالت در زمان بعد، احتمال حالت اولیه در احتمال انتقال، که در ماتریس انتقال آمده است، ضرب می‌شود. در واقع احتمالات حالت اولیه به عنوان یک ماتریس سطری در ماتریس انتقال ضرب می‌شود تا احتمال وجود فرایند در هر یک از حالتها در دورهٔ زمانی بعد مشخص شود.

فرض کنید ماتریس انتقال یک فرایند خاص زنجیره مارکوف به صورت زیر باشد و احتمالات حالت اولیه یعنی n=0 اینگونه باشد:

$$P_A^{(0)}= 0/45 \ , \ P_B^{(0)}=0/35 \ , \ P_C^{(0)}=0/2$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ P= & \begin{bmatrix} ۰/۹ & ۰/۰۵ & ۰/۰۵ \\ ۰/۱ & ۰/۸ & ۰/۱ \\ ۰/۱ & ۰/۱۵ & ۰/۷۵ \end{bmatrix} \end{array}$$

چنانکه ملاحظه می‌شود مجموعه احتمالات حالت اولیه در فوق ۱ می‌شود یعنی احتمال وجود فرایند در یکی از سه حالت صد در صد است.

امّا احتمالات حالت جدید برای دورهٔ n=۱ با ضرب احتمالات حالت اولیه به صورت ماتریس سطری در ماتریس انتقال به دست می‌آید:

$$\begin{array}{c} P_A^{(۰)} \ \ P_B^{(۰)} \ \ P_C^{(۰)} \\ [۰/۴۵ \ \ ۰/۳۵ \ \ ۰/۲] \end{array} \begin{bmatrix} ۰/۹۰ & ۰/۰۵ & ۰/۰۵ \\ ۰/۱۰ & ۰/۸۰ & ۰/۱۰ \\ ۰/۱۰ & ۰/۱۵ & ۰/۷۵ \end{bmatrix} \begin{array}{c} P_A^{(۱)} \ \ P_B^{(۱)} \ \ P_C^{(۱)} \\ =[۰/۴۶ \ \ ۰/۳۳۲۵ \ \ ۰/۲۰۷۵] \end{array}$$

اولین عنصر یعنی احتمال حالت جدید برای زمان n=۱ به صورت زیر به دست آمده است:

احتمال حالت جدید (n=۱) = احتمال انتقال × احتمال حالت اولیه (n=۰)

$$\begin{array}{ccccc} ۰/۴۵ & \times & ۰/۹ & = & ۰/۴۰۵۰ \\ ۰/۳۵ & \times & ۰/۱ & = & ۰/۰۳۵۰ \\ ۰/۲۰ & \times & ۰/۱ & = & ۰/۰۲۰۰ \\ \hline & & & P_A^{(۱)}= & ۰/۴۶۰۰ \end{array}$$

بقیه احتمالات نیز همین‌گونه به دست آمده است. دقت شود که احتمال وجود فرایند در حالت A در دورهٔ بعد از بقیه حالتها بیشتر است، و این به خاطر انتقال از حالتهای دیگر به این حالت است.

برای به دست آوردن احتمالات حالت دورهٔ n=۲ به دو طریق زیر می‌توان عمل نمود:

الف - احتمالات حالت دورهٔ n=۱ در ماتریس انتقال، بدین ترتیب ضرب می‌شود:

$$\begin{array}{ccc} P_A^{(۱)} & P_B^{(۱)} & P_C^{(۱)} \\ \end{array}$$

$$[۰/۴۶ \quad ۰/۳۳۲۵ \quad ۰/۲۰۷۵]\begin{bmatrix} ۰/۹۰ & ۰/۰۵ & ۰/۰۵ \\ ۰/۱۰ & ۰/۸۰ & ۰/۱۰ \\ ۰/۱۰ & ۰/۱۵ & ۰/۷۵ \end{bmatrix} = \begin{array}{ccc} P_A^{(۲)} & P_B^{(۲)} & P_C^{(۲)} \\ {[۰/۴۶۸} & ۰/۳۲۰۱۲۵ & ۰/۲۱۱۸۷۵] \end{array}$$

ب ـ احتمالات حالت دوره ۰=n در توان دوم ماتریس انتقـال، یعنی P^2 ضرب می‌شود:

$$P^۲ = \begin{bmatrix} ۰/۰۹ & ۰/۰۵ & ۰/۰۵ \\ ۰/۱۰ & ۰/۸۰ & ۰/۱۰ \\ ۰/۱۰ & ۰/۱۵ & ۰/۷۵ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰/۹۰ & ۰/۰۵ & ۰/۰۵ \\ ۰/۱۰ & ۰/۸۰ & ۰/۱۰ \\ ۰/۱۰ & ۰/۱۵ & ۰/۷۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰/۸۲۰۰ & ۰/۰۹۲۵ & ۰/۰۸۷۵ \\ ۰/۱۸۰۰ & ۰/۶۶۰۰ & ۰/۱۶۰۰ \\ ۰/۱۸۰۰ & ۰/۲۳۷۵ & ۰/۵۸۲۵ \end{bmatrix}$$

اکنون باید احتمالات حالت اولیه ۰=n در $P^۲$ ضرب شود:

$$\begin{array}{ccc} P_A^{(۰)} & P_B^{(۰)} & P_C^{(۰)} \\ {[۰/۴۵} & ۰/۳۵ & ۰/۲۰] \end{array}\begin{bmatrix} ۰/۸۲۰۰ & ۰/۰۹۲۵ & ۰/۰۸۷۵ \\ ۰/۱۸۰۰ & ۰/۶۶۰۰ & ۰/۱۶۰۰ \\ ۰/۱۸۰۰ & ۰/۲۳۷۵ & ۰/۵۸۲۵ \end{bmatrix} = \begin{array}{ccc} P_A^{(۲)} & P_B^{(۲)} & P_C^{(۲)} \\ {[۰/۴۶۸} & ۰/۳۲۰۱۲۵ & ۰/۲۱۱۸۷۵] \end{array}$$

ملاحظه کنید که پاسخ در هر دو مورد یکسان است و احتمال وجود فرایند در زمان ۱=n در حالتهای C,B,A به ترتیب ۰/۴۶، ۰/۳۳۲۵ و ۰/۲۰۷۵ و در زمـان ۲=n، بـه تـرتیب ۰/۴۶۸، ۰/۳۲۰۱۲۵ و ۰/۲۱۱۸۷۵ خواهد بود.

به همین ترتیب می‌توان برای دوره‌های بعد نیز عمل کرد و برای هر زمانی از n یا احتمالات حالت اولیه ۰=n را در توان nام ماتریس انتقال ضرب نمود و یا باید احتمالات حالت دوره (۱ ـ n) را در ماتریس انتقال ضرب کرد. اینک از محاسبات صرف نظر، و احتمالات حالت برای چند دورهٔ انتخابی ارائه می‌شود:

دوره	n=۰	n=۱	n=۱۰	n=۱۵	n=۲۰	n=۲۵	n=۳۰
$P_A^{(n)}$	۰/۴۵	۰/۴۶	۰/۴۹۴۶۶	۰/۴۹۸۲۴	۰/۴۹۹۴۲	۰/۴۹۹۸۲	۰/۴۹۹۹۴
$P_B^{(n)}$	۰/۳۵	۰/۳۳۲۵	۰/۲۸۹۷۰	۰/۲۸۶۹۳	۰/۲۸۶۱۰	۰/۲۸۵۸۴	۰/۲۸۵۷۵
$P_C^{(n)}$	۰/۲۰	۰/۲۰۷۵	۰/۲۱۵۶۴	۰/۲۱۴۸۳	۰/۲۱۴۴۸	۰/۲۱۴۳۴	۰/۲۱۴۳۱

چنانکه ملاحظه می‌شود با افزایش n احتمالات حالتها تغییر کمتری می‌کنند. این امر دلالت می‌کند که احتمالات حالت ممکن است به سمت یک مجموعه ثابت همگرا شوند و سرانجام بدون تغییر باقی بمانند. در این نقطه فرایند به یک حالت پایدار[۲۴] می‌رسد و در همان حالت باقی خواهد ماند تا اینکه اعمال خارجی احتمالات را تغییر دهند.

در جدول ملاحظه می‌شود که احتمالات حالت پایدار برای C,B,A به ترتیب تقریباً برابر با ۰/۵، ۰/۲۸۶ و ۰/۲۱۴ هستند؛ یعنی در بلند مدت انتظار می‌رود احتمالات حالت به این مقادیر برسند. این نشان می‌دهد که تأثیر پذیری فرایند در زمان طولانی از حال حاضر ناچیز می‌شود.

محاسبهٔ احتمالات حالت پایدار

برای به دست آوردن احتمالات حالت پایدار به طریقی که در فوق آمده است زمان زیادی نیاز دارد. به منظور ارائه یک راه حل کوتاه، احتمالات از طریق عملیات ماتریسی محاسبه می‌شود.

همانگونه که ملاحظه شد، احتمال ورود به یک حالت خاص، با ضرب احتمال در مقادیر مربوط در ستون ماتریس انتقال به دست می‌آید. برای مثال فوق روابط زیر برقرار است:

$$P_A = 0.9\,P_A + 0.1P_B + 0.1P_C$$
$$P_B = 0.05P_A + 0.8P_B + 0.15P_C$$
$$P_C = 0.05P_A + 0.1P_B + 0.75P_C$$

قبلاً نیز بیان شد که جمع هر سطر در ماتریس انتقال باید برابر ۱ باشد یا به عبارتی احتمال وجود فرایند در مجموع حالتهای خود باید معادل ۱ باشد و این مطلب، محدودیت زیر را اعمال می‌کند:

$$P_A + P_B + P_C = 1$$

با حل چهار معادلهٔ فوق، احتمالات حالت پایدار برای هر حالت بدین ترتیب به دست خواهد آمد:

$$P_A - 0.9P_A = 0.1P_B + 0.1P_C$$
$$0.1P_A = 0.1P_B + 0.1P_C$$
$$P_A = P_B + P_C$$

و چون تمام احتمالات باید در مجموع یک باشند، با استفاده از $P_B + P_C$ برای P_A می‌توان اینگونه نوشت:

$$(P_A + P_C) + P_B + P_C = 1$$
$$2P_B + 2P_C = 1$$
$$P_B = 0.5 - P_C$$

و بنابراین:

$$P_A = (0.5 - P_C) + P_C = 0.5$$

با قرار دادن $P_A = 0.5$ و $P_B = 0.5 - P_C$ در معادله دوم دیده می‌شود که:

$$0.5 - P_C = 0.05\,(0.5) + 0.8\,(0.5 - P_C) + 0.15P_C$$
$$P_C = 0.21429$$

و

$$P_B = 0.5 - 0.21429 = 0.28571$$

و مجموعه احتمالات حالت پایدار اینگونه هستند:

$$P_A = 0.5 \quad P_B = 0.28571 \quad P_C = 21429$$

که با محاسبات قبلی توافق دارد[۲۵].

در واقع احتمالات حالت پایدار یا حدی[۲۶] بیانگر این است که در $P_{ij}^{(n)}$ هنگامی که n به سمت بی‌نهایت حرکت می‌کند، حد آن یعنی $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)}$ به سمت یک مقدار ثابت میل میکند؛ یعنی هر سطر آن همچون معادلهٔ زیر خواهد بود:

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = \pi_j$$

وقتی که این احتمالات حدی غیر شرطی که از احتمالات اولیه و زمان پارامتر n مستقل هستند وجود دارند، می‌توان آنها را از رابطه زیر به دست آورد:

$$\lim_{n\to\infty} \pi^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \pi^{(n-1)} P$$

فرض کنید که $\pi = (\pi_0 , \pi_1 , \ldots)$ بیانگر بردار احتمال حدی باشد، آنگاه رابطه به صورت زیر در خواهد آمد:

$$\lim_{n\to\infty} \pi^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \pi^{(n-1)} = \pi$$

و بنابراین

$$\pi = \pi P$$

معادلهٔ فوق، معادلهٔ ایستای[۲۷] زنجیره مارکوف نامیده می‌شود، و حل آن توزیع ایستا گفته می‌شود. ممکن است در بعضی از موارد برای معادلهٔ ایستا حل وجود داشته باشد حتی وقتی که توزیع حدی وجود نداشته باشد.

بنابراین وقتی که یک توزیع حدی وجود دارد، این دلالت می‌کند که برای معادلهٔ ایستا حل وجود دارد، و نتیجه این توزیع ایستا، توزیع حدی (پایدار) است. اما عکس آن صادق نیست؛ یعنی، وجود یک حل برای معادلهٔ ایستا بر وجود یک توزیع حدی دلالت نمی‌کند. برای آشنایی بیشتر به مثال زیر توجه کنید:

یک فرایند تصادفی، مارکوف را با ماتریس انتقال زیر نظر بگیرید:

$$P = \begin{bmatrix} \text{۰} & \text{۱} \\ \text{۰} & \text{۱} \end{bmatrix}$$

اکنون معادله ایستا حل می‌شود و بردار توزیع ایستا به دست می‌آید:

$$[\pi_0 , \pi_1] = [\pi_0 , \pi_1] \begin{bmatrix} \text{۱} & \text{۰} \\ \text{۱} & \text{۰} \end{bmatrix}$$

که نتیجه می‌شود که $\pi_0 = \pi_1$ است. با استفاده از $\pi_0 + \pi_1 = 1$

توزیع ایستا $\pi_0 = \pi_1 = \frac{\text{۱}}{\text{۲}}$ می‌شود. امّا آیا یک توزیع حدی نیز هست؟ طبیعتاً اینگونه نخواهد بود، چون که فرایند پیوسته بطور متناوب تغییر می‌کند و احتمال اینکه در یک حالت خاص صفر یا یک در آینده یافت شود به مقدار خاص n انتخاب شده بستگی دارد. این موضوع به سهولت با ضرب متوالی ماتریس P به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$P^{(n)} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \text{۱} & \text{۰} \\ \text{۰} & \text{۱} \end{bmatrix} & \text{برای n زوج} \\[2ex] \begin{bmatrix} \text{۰} & \text{۱} \\ \text{۱} & \text{۰} \end{bmatrix} & \text{برای n فرد} \end{cases}$$

بنابراین صرفاً با وجود یک جواب برای $\pi = \pi P$ حد $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ وجود ندارد. علاوه بر این $\lim_{n\to\infty} \pi_{(n)}$ نیز وجود ندارد، مگر در صورت $\pi^{(0)} = [\frac{\text{۱}}{\text{۲}} \text{ و } \frac{\text{۱}}{\text{۲}}]$ یعنی توزیع احتمال اولیه معادل با توزیع ایستاست و تنها برای $\pi^{(0)}$ اینگونه است.

$$\pi^{(1)} = [\frac{\text{۱}}{\text{۲}} \text{ و } \frac{\text{۱}}{\text{۲}}] \begin{bmatrix} \text{۰} & \text{۱} \\ \text{۱} & \text{۰} \end{bmatrix} = [\frac{\text{۱}}{\text{۲}} \text{ و } \frac{\text{۱}}{\text{۲}}]$$

و از این رو $\pi^{(n)}$ به صورت زیر در می‌آید[۲۸]:

$$\pi^{(n)} = [\frac{\text{۱}}{\text{۲}} \text{ و } \frac{\text{۱}}{\text{۲}}] \quad \text{برای هر n}$$

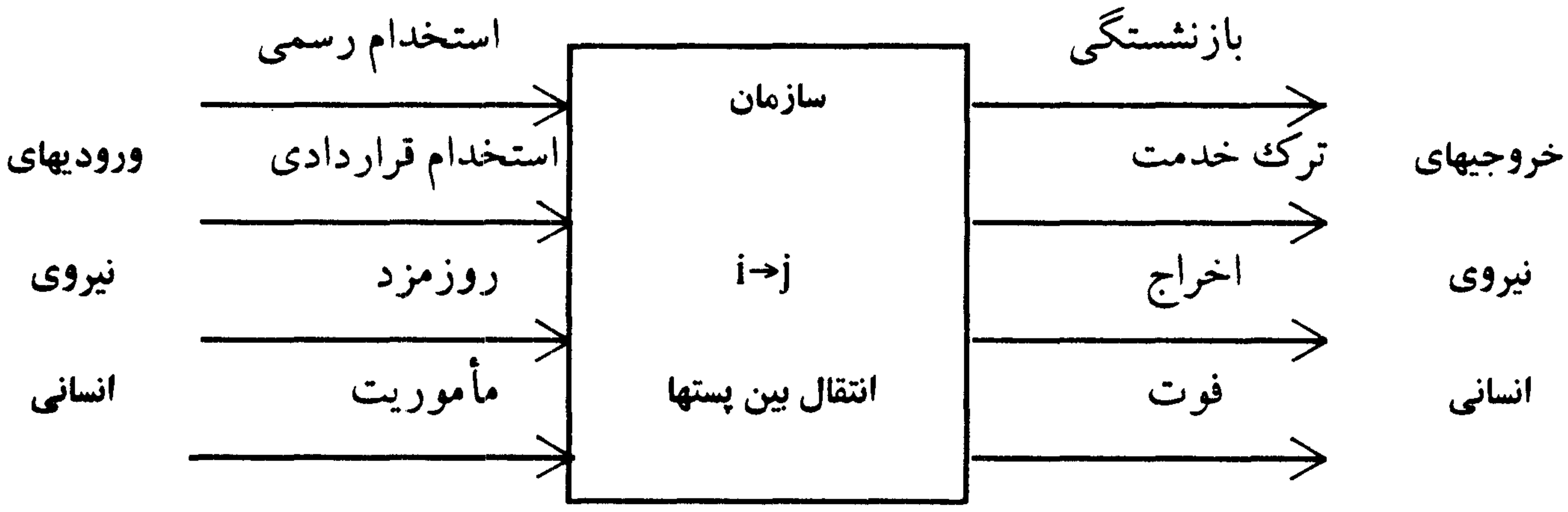
کاربرد زنجیره‌های مارکوف در برنامه‌ریزی نیروی انسانی[۲۹]

برنامه‌ریزی نیروی انسانی یکی از مهمترین برنامه‌های سازمانی است که به شیوه‌های مختلف در این زمینه اقدام می‌شود. گاهی اوقات از مدلهای احتمالی برای برنامه‌ریزی استفاده می‌شود. هنگامی که نقل و انتقالات و جابجاییهای نیروی انسانی سازمان تصادفی باشد، مدلهای احتمالی به کمک خواهند آمد که یکی از آنها زنجیره‌های مارکوف است که این مدل نقل و انتقالات احتمالی نیروی انسانی را پیش بینی می‌کند.

جابجاییها در نیروی انسانی

نیروی انسانی یکی از حساس‌ترین عوامل تولید است که کنترل آن برای سازمان از ارزش والایی برخوردار است. نقل و انتقالات و جابجاییهای نیروی انسانی نیز گاهی اوقات برای آینده سازمان اهمیت زیادی دارد.

علاوه بر نقل وانتقالات داخلی بین پستها در سیستم نیروی انسانی هر سازمان، تعدادی ورودی و خروجی برای این سیستم وجود دارد که شامل ترک خدمتها، اخراجها، بازنشستگیها، فوتها، مرخصیها، حوادث و مواردی دیگری می‌شود که به همراه تغییر شغلها و ارتقاها تشکیل دهنده نقل و انتقالات می‌شوند. بطور کلی نقل و انتقالات این سیستم به صورت زیر خواهد بود:



در زنجیره‌های مارکوف برای برنامه‌ریزی نیروی انسانی یک ماتریس انتقال وجود دارد که ماتریس انتقال نیروی انسانی نامیده می‌شود. در این ماتریس حالتها، پستها می‌باشند، که یک فرد ممکن است در زمانهای مختلف در یکی از این پستها (حالتها) باشد. در ماتریس مذکور علاوه بر پستها به عنوان حالتها، باید برای ورودیها و خروجیها نیز حالتهای جداگانه‌ای در نظر گرفت، چون از ماتریسها نیرو خارج نمی‌شود و سرانجام، به حالت نهایی که همان خروجی است منتقل می‌شود. در ماتریس انتقال نیروی انسانی P_{ij} بیانگر احتمال انتقال یک فرد از پست i به پست j است.

احتمالات انتقال نیروی انسانی

طبق تعریف کلاسیک، احتمال عبارت است از فراوانی نسبی پیشامد (حالت) مورد نظر، و بدین ترتیب تعداد حالتهای مساعد مورد نظر به تعداد کل حالتها تقسیم می‌شود:

احتمال رخ دادن یک حالت (پیشامد) خاص =

تعداد حالتها (پیشامدها)ی مورد نظر
کل حالتها (پیشامدها)ی ممکن

احتمال انتقال یک فرد از پست i به پست j برابر است با تعداد انتقالات در فاصلهٔ زمانی معیّن تقسیم بر تعداد کل نیروی موجود در همان دورهٔ زمانی:

P_{ij} = احتمال انتقال یک نفر از پست i به پست j =

تعداد انتقالات از پست i به پست j بر حسب نفر سال
تعداد کل نیروی انسانی موجود در پست i بر حسب نفر سال

احتمال ابقای یک فرد در پست برابر است با تعداد ابقاها در یک دورهٔ زمانی خاص تقسیم بر تعداد کل نیروی انسانی موجود در همان دوره:

P_{ii} = احتمال ابقای یک نفر در پست i =

تعداد کل ابقاها در پست i بر حسب نفر سال
تعداد کل نیروی انسانی موجود در پست i بر حسب نفر سال

آنگاه با استفاده از احتمالات انتقال به دست آمده ماتریس انتقال نیروی انسانی تشکیل می‌شود.
فرض کنید در یک سازمان کوچک فرضی، چهار پست وجود داشته باشد و تعداد نیروی موجود در این سازمان نیز ثابت باشد و تنها نقل و انتقالات بین این چهار پست صورت گیرد و نَه موارد دیگر مثل خروجی و ورودی. (منظور انتقال به خارج سازمان شامل ترک خدمت، بازنشستگی و ... و انتقال از خارج سازمان مثل استخدام است.)
پس از انجام محاسبات لازم احتمالات انتقالی در ماتریس زیر آمده است:

P =

از پست \ به پست	۱	۲	۳	۴
۱	۰/۹	۰/۰۵	۰	۰/۰۵
۲	۰/۱	۰/۸	۰/۰۵	۰/۰۵
۳	۰	۰/۰۵	۰/۸۵	۰/۱
۴	۰/۰۵	۰	۰	۰/۹۵

ماتریس انتقال نیروی انسانی

۰/۹ و سایر عناصر قطر اصلی ماتریس بیانگر احتمال ابقای هر فرد در پست است. ۰/۰۵ سطر اول و ستون دوم احتمال انتقال از پست ۱ به پست ۲ است. و عنصر سطر سوم و ستون اول بیان می‌کند که احتمال انتقال از پست ۳ به پست ۱ صفر است.

فرض کنید نیروی انسانی موجود در هر پست برای سالجاری به ترتیب ۴، ۳، ۸ و ۱۵ نفر برای پستهای ۱، ۲، ۳ و ۴ باشد. اکنون به کمک ماتریس انتقال می‌توان میزان موجودی نیروی انسانی در هر پست را برای سال آینده به دست آورد. بدین منظور ماتریس سطری نیروی انسانی موجود سالجاری در ماتریس انتقال ضرب می‌شود:

[۱۵، ۸، ۳، ۴]

$$\begin{bmatrix} 0/9 & 0/05 & 0 & 0/05 \\ 0/1 & 0/80 & /05 & 0/05 \\ 0 & 0/05 & 0/85 & 0/1 \\ 0/05 & 0 & 0 & 0/95 \end{bmatrix} = [15/4,\ 6/95,\ 3,\ 4/65]$$

همانگونه که در ماتریس سطری حاصل ملاحظه می‌شود، در سال آینده در پستهای ۱، ۲، ۳ و ۴ به ترتیب ۴/۶۵، ۳، ۶/۹۵ و ۱۵/۴ نفر نیرو وجود خواهد داشت. در اینجا دو مشکل وجود دارد، یکی اعشاری بودن تعداد نیروی انسانی است و دیگری اینکه به خاطر سهولت محاسبه فرض شده است که تعداد نیروی انسانی ثابت باشد و انتقالی به خارج و یا از خارج وجود نداشته باشد که این امر بیان می‌کنند که اغلب نیروها پس از چند دوره از پستهای ۲ و ۳ به پستهای ۱ و ۴ منتقل خواهند شد و در پست ۲ و ۳ کمبود نیرو و در پست ۱ و ۴ تورم نیرو وجود خواهد داشت و به منظور رفع این کمبود باید ورودیها به سازمان به عنوان یک حالت و خروجیها (بویژه خروجیها) نیز به عنوان یک حالت به ماتریس انتقال اضافه شود.

برای یافتن نیروی انسانی موجود در هر پست برای ۲ سال بعد، ۱۰ سال بعد و n سال بعد باید نیروی انسانی موجود در سالجاری را در ماتریس توان دوم، دهم و nام ضرب نمود و یا به طریقهٔ دوم باید نیروی موجود در سال آینده، سال نهم و سال (n - ۱) را در ماتریس انتقال ضرب نمود.

بدین ترتیب با یافتن نیروی انسانی موجود در هر پست برای آینده می‌توان کمبودها و مازادها در هر پست را بطور احتمالی برآورد کرد.

کاربرد زنجیره‌های مارکوف در کنترل موجودی [30]

هر سازمان تولیدی یا تجارتی، انباری از مواد اولیه را خواهد داشت که بتواند در طول دوره به فعالیت خود ادامه دهد. اما اینکه مقدار موجودی در هر لحظه‌ای از زمان چقدر باشد، مسأله‌ای مهم است و یکی از مدلهای مفید در این زمینه زنجیره‌های مارکوف است. موضوع با ارائه یک مثال تشریح می‌شود:

یک دوربین فروش، دوربین خاصی را که می‌تواند آن را به صورت هفتگی سفارش دهد، انبار می‌کند. تقاضا در طی هفته اول، دوم و ... معادل D_1، D_2 و ... است. فرض بر این است که D_i یک متغیر مستقل است و دارای توزیع پواسن با پارامتر $\lambda = 1$ است. فرض کنید که X_0 تعداد دوربینهای موجود در ابتدای دوره، X_1 تعداد دوربینهای موجود در پایان هفته اول، X_2 تعداد دوربینهای موجود در انتهای هفته دوم والی آخر باشد و فرض کنید $X_0 = 3$ باشد. هر پنج‌شنبه شب فروشگاه سفارش می‌دهد که هنگام باز شدن فروشگاه در شنبه تحویل می‌شود. فروشگاه از سیاست (X_t , S) استفاده می‌کند؛ یعنی اگر تعداد دوربینهای موجود در انتهای هفته $X_t < 1$ باشد سفارش فروشگاه $S = 3$ است. در غیر این صورت فروشگاه سفارش نمی‌دهد. فرض این است که هنگامی که تقاضای مازاد بر موجودی در دست باشد، فروش کم خواهد شد. بنابراین $\{X_t\}$ برای $t = 0$ و ۱ و ... یک فرایند تصادفی است. حالات ممکن فرایند، اعداد صحیح $\{0,1,2,3\}$ هستند که تعداد ممکن دوربینهای موجود انتهای هفته را بیان می‌کند. در واقع متغیر تصادفی X_t با عبارت زیر تعیین می‌شود:

$$X_t = \begin{cases} \max\{0,\ (3 - D_t)\} & X_{t-1} < 1 \\ \max\{0,\ (X_{t-1} - D_t)\} & X_{t-1} \geq 1 \end{cases}$$

اگر $X_{t-1} < 1$ باشد {۰ و (۳ - D_t)} حداکثر (ماکزیمم)

اگر $X_{t-1} \geq 1$ باشد {۰ و ($X_{t-1} - D_t$)} حداکثر (ماکزیمم)

حال دقت کنید که عناصر ماتریس انتقال یعنی احتمالات انتقال چگونه به دست می‌آید. برای به دست آوردن P_{00} تعیین $P\{X_t = 0 \mid X_{t-1} = 0\}$ ضروری است. اگر $X_{t-1} = 0$ باشد آنگاه

$X_t =$ حداکثر $\{(3-D_t), 0\}$ است. اگر $X_t = ۰$ باشد، تقاضا در طی هفته باید ۳ یا بیشتر باشد. از این رو $P_{00} = P\{D_t \geq 3\}$ است. این احتمال یک متغیر تصادفی پواسن با پارامتر $\lambda = ۱$ است که مقدار ۳ یا بیشتر را بخود می‌گیرد، که از جدول توزیع پواسن، $P_{00} = ۰/۰۸$ می‌شود.

$P_{10} = P\{X_t = 0 \mid X_{t-1} = 1\}$ نیز به همین شیوه به دست می‌آید. اگر $X_{t-1} = ۱$ باشد، آنگاه $X_t =$ حداکثر $\{(1-D_t), 0\}$ است. با داشتن $X_t = ۰$ تقاضا طی هفته باید یک یا بیشتر باشد. از این رو با استفاده از جدول پواسن $P_{10} = p\{D_t \geq 1\} = ۰/۶۳۲$ است. برای یافتن $P_{21} = P\{X_t = 1 \mid X_{t-1} = 2\}$ دقت کنید که $X_t =$ حداکثر $\{(2-D_t), ۰\}$ می‌شود، اگر $X_{t-1} = ۲$ باشد. بنابراین اگر $X_t = ۱$ باشد آنگاه تقاضا طی هفته آینده باید دقیقاً یک باشد. از این رو از جدول توزیع پواسن $P_{21} = P\{D_t = 1\} = ۰/۳۶۸$ می‌شود. سایر عناصر نیز به همین ترتیب محاسبه می‌شوند که ماتریس انتقال زیر را تشکیل می‌دهند:

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \left[\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0/08 & 0/184 & 0/368 & 0/368 \\ 0/632 & 0/368 & 0 & 0 \\ 0/264 & 0/368 & 0/368 & 0 \\ 0/08 & 0/184 & 0/368 & 0/368 \end{array} \right]$$

این ماتریس انتقال مرحله یک است و برای مراحل بعدی نیز با ضرب متوالی (توان) به دست می‌آید. البته می‌توان از برنامه‌ریزی خطی برای موجودی بهینه استفاده کرد که در این مختصر برنامهٔ خطی این مسأله نمی‌گنجد.

کاربرد زنجیره‌های مارکوف در تعمیرات و نگهداری[31]

یک ماشین خاص که در یک فرایند تولید کار می‌کند، تحت استفاده سنگین، هم از لحاظ کیفیت و هم از نظر کمیت محصول، سریعاً خراب می‌شود. این ماشین به صورت دوره‌ای در پایان هر روز، معاینه و بازرسی می‌شود. بلافاصله بعد از هر بازرسی، وضعیت ماشین یادداشت می‌شود و به چهار حالت ممکن تقسیم می‌شود:

حالت	وضعیت
۰	خوب همانند ماشین نو
۱	قابل استفاده ـ با خرابی کم
۲	قابل استفاده ـ با خرابی زیاد
۳	غیر قابل استفاده ـ محصول با کیفیت غیر قابل قبول است.

فرض کنید که X_t حالت مشاهده شده ماشین بعد از بازرسی در انتهای روز tام، و توالی حالتها یک فرایند تصادفی باشد، همچنین فرایند تصادفی یک زنجیره مارکوف با فضای حالت متناهی با ماتریس انتقال زیر باشد:

حالت	۰	۱	۲	۳
۰	۰	$\frac{7}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
۱	۰	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
۲	۰	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
۳	۰	۰	۰	۱

ماتریس نشان می‌دهد که هنگامی که ماشین غیر قابل استفاده باشد (وارد حالت ۳ شده باشد)، همینطور غیر قابل استفاده باقی خواهد ماند و در این حالت، دیگر ماشین نمی‌تواند برای تداوم در فرایند تولید باقی بماند و باید تعویض یا تعمیر شود و در واقع این یک حالت جاذب است که سیستم بدون دخالت عامل خارجی از آن حالت خارج نخواهد شد، عمل تعویض، حرکت سیستم را تغییر می‌دهد، و این عمل یک سیاست تعمیر و نگهداری می‌تواند باشد.

وقتی که یک ماشین غیر قابل استفاده می‌شود و تعویض می‌شود، ماشین جایگزین شده در حالت «خوب همانند ماشین نو»

است، یعنی ماشین در حالت صفر است و فرایند تعویض یک روز را برای انجام عملیات به خود اختصاص می‌دهد.

هزینه‌های حاصل از هر حالت در خلال روز بعد که شامل اقلام معیوب می‌شود به ترتیب زیر خواهد بود:

حالت	هزینه مورد انتظار حاصل از اقلام معیوب
۰	۰
۱	۱۰۰۰ ریال
۲	۳۰۰۰ ریال

اما اگر ماشین تعویض شود، یک هزینه تعویض ۴۰۰۰ ریالی همراه با یک کاهش تولید ۲۰۰۰ ریالی رخ می‌دهد، بنابراین تمام هزینه رخ داده در حالت ۳، ۶۰۰۰ ریال است. تجزیه و تحلیل زنجیره مارکوف با ماتریس قبلی بی‌فایده است چون فرایند پس از چند دوره وارد حالت ۳ شده و از آن خارج نشده و ماشین غیر قابل استفاده باقی خواهد ماند. ولی با تعویض ماشین باز هم فرایند تصادفی، سیستم را به صورت یک زنجیره مارکوف با فضای حالت متناهی در می‌آورد امّا با ماتریس انتقال زیر:

حالت	۰	۱	۲	۳
۰	۰	$\frac{۷}{۸}$	$\frac{۱}{۱۶}$	$\frac{۱}{۱۶}$
۱	۰	$\frac{۳}{۴}$	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۱}{۸}$
۲	۰	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$
۳	۱	۰	۰	۰

ارزیابی هزینه این «سیاست تعمیر و نگهداری» می‌تواند مفید باشد. اگر هزینه متوسط مورد انتظار هر روز یک معیار مناسب باشد، معادلات حالت پایدار به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$P_۰ = P_۳$$

$$P_۱ = \frac{۷}{۸}P_۰ + \frac{۳}{۴}P_۱$$

$$P_۲ = \frac{۱}{۱۶}P_۰ + \frac{۱}{۸}P_۱ + \frac{۱}{۲}P_۲$$

$$P_۳ = \frac{۱}{۱۶}P_۰ + \frac{۱}{۸}P_۱ + \frac{۱}{۲}P_۲$$

$$P_۰ + P_۱ + P_۲ + P_۳ = ۱$$

با حل همزمان معادلات فوق داریم:

$$P_۰ = \frac{۲}{۱۳}$$

$$P_۱ = \frac{۷}{۱۳}$$

$$P_۲ = \frac{۲}{۱۳}$$

$$P_۳ = \frac{۲}{۱۳}$$

و با ضرب احتمالات فوق در هزینه متوسط، هزینه متوسط مورد انتظار هر روز به دست می‌آید:

$$۰P_0+۱۰۰۰P_1+۳۰۰۰P_2+۶۰۰۰P_3=\frac{۲۵۰۰۰}{۱۳}=۱۹۲۳/۰۸ \text{ ریال}$$

این عدد بیانگر هزینه این سیاست تعمیر و نگهداری است.

برنامه‌ریزی خطی و سیاست بهینه

به منظور گسترش مسألهٔ تعمیر و نگهداری، فرض کنید تصمیم پیاده‌کردن ماشین به تصمیم تعویض ماشین اضافه شود و هزینه هر تصمیم برای هر حالت طبق جدول شماره ۱ باشد:

تصمیم	هزینه حالت	هزینه مورد انتظار حاصل از اقلام معیوب	هزینه تعمیر و نگهداری	هزینه (کاهش شود) کاهش تولید	هزینه کل روزانه
۱- رها کردن ماشین همانگونه که هست	۰	۰	۰	۰	۰
	۱	۱۰۰۰ ریال	۰	۰	۱۰۰۰ ریال
	۲	۳۰۰۰ ریال	۰	۰	۳۰۰۰ ریال
	۳	∞۳۲	۰	۰	∞
۲- پیاده کردن ماشین	۱،۲ و ۰	۰	۲۰۰۰ ریال	۲۰۰۰ ریال	۴۰۰۰ ریال
	۳	۰	∞۳۲	۲۰۰۰ ریال	∞
۳- تعویض	۱،۲،۳ و ۰	۰	۴۰۰۰ ریال	۲۰۰۰ ریال	۶۰۰۰ ریال

جدول شماره ۱

اطلاعات فوق در جدول زیر خلاصه می‌شود:

حالت i \ تصمیم k	۱	۲	۳
۰	۰	۴۰۰۰	۶۰۰۰
۱	۱۰۰۰	۴۰۰۰	۶۰۰۰
۲	۳۰۰۰	۴۰۰۰	۶۰۰۰
۳	∞	∞	۶۰۰۰

جدول هزینه‌ها (C_{ik})

فرض کنید D_{ik} بیانگر احتمال شرطی تصمیم k برای زمانی که سیستم در حالت i است باشد یعنی:

$k = ۱$ و ۲ و ... و K

$D_{ik} = P\{.............\}$ و

$i = ۰$ و ۱ و ... و M

و y_{ik} احتمال غیر شرطی (حالت پایدار) فرایند در حالت i با تصمیم اخذ شده k باشد یعنی:

$Y_{ik} = P\{$ حالت = i و تصمیم = k $\}$

و با استفاده از قواعد احتمال شرطی و قانون بیز روابط زیر برقرار است:

$$Y_{ik} = \pi_i \ D_{ik}$$

$$\pi_i = \sum_{k=1}^{k} y_{ik}$$

آنگاه تابع هدف برای هزینه متوسط مورد انتظار اینگونه خواهد شد:

$$E_{(c)} = \sum_{i=0}^{M} \sum_{k=1}^{K} \pi_i \ C_{ik} D_{ik} = \sum_{i=0}^{M} \sum_{k=1}^{K} C_{ik} \ y_{ik}$$

که باید حداقل (می‌نیمم) شود،

و محدودیتهای زیر نیز وجود خواهند داشت:

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{M} \pi_i = \sum_{i=0}^{M} \sum_{k=1}^{k} y_{ik} = 1 \\ \sum_{k=1}^{k} y_{ik} = \sum_{i=0}^{M} \sum_{k=1}^{k} y_{ik} \ P_{ij(\kappa)} \text{ یا } \sum_{k=1}^{K} y_{ik} - \sum_{i=0}^{M} \sum_{k=1}^{K} y_{ik} \ P_{ij(\kappa)} = 0 \\ y_{ik} \geq ۰ \text{ و } i = ۰ \text{ و ۱ و ۲ و ... و } M \text{ و } k = ۱ \text{ و ۲ و ... و } K. \end{cases}$$

فرمول برنامه‌ریزی خطی این سیاست اینگونه می‌شود:

حداقل $C = ۴۰۰۰y_{۰۲} + ۶۰۰۰y_{۰۳} + ۱۰۰۰y_{۱۱} + ۴۰۰۰y_{۱۲} + ۶۰۰۰y_{۱۳} + ۳۰۰۰y_{۲۱} + ۴۰۰۰y_{۲۲} + ۶۰۰۰y_{۲۳} + M_۱y_{۱۳} + M_۲y_{۲۳} + ۶۰۰۰y_{۳۳}$

که در آن M اعداد بزرگ هستند.

با محدودیتهای:

$$\sum_{k=۱}^{۳} y_{0k} - (y_{۰۳} + y_{۱۳} + y_{۲۳} + y_{۳۳}) = ۰$$

$$\sum_{k=۱}^{۳} y_{1k} - (\frac{۷}{۸} y_{۰۱} + y_{۰۲} + \frac{۳}{۴} y_{۱۱} + y_{۱۲} + y_{۲۲} + y_{۲۳}) = ۰$$

$$\sum_{k=۱}^{۳} y_{2k} - (\frac{۱}{۱۶} y_{۰۱} + \frac{۱}{۸} y_{۱۱} + \frac{۱}{۲} y_{۲۱}) = ۰$$

$$\sum_{k=۱}^{۳} y_{۳k} - (\frac{۱}{۱۶} y_{۰۱} + \frac{۱}{۸} y_{۱۱} + \frac{۱}{۲} y_{۲۱} + y_{۳۱}) = ۰$$

$Y_{ik} \geq ۰ , i = ۰،۱،۲،۳$ و $K = ۱،۲،۳$

حل این برنامه خطی با استفاده از روش سیمپلکس جوابهای زیر را دارد:

$y_{۰۱} = \frac{۲}{۲۱}$ و $y_{۱۱} = \frac{۵}{۷}$، $y_{۲۲} = \frac{۲}{۲۱}$، $y_{۳۳} = \frac{۲}{۲۱}$ و سایر y_{ik}ها برابر صفر هستند.

اکنون با استفاده از روابط قبلی D_{ik} محاسبه می‌شود:

$$D_{ik} = \frac{y_{ik}}{\Sigma y_{ik}}$$

$$D_{۰۱} = D_{۱۱} = D_{۲۲} = D_{۲۳} = ۱$$

$$D_{ik} = \frac{y_{ik}}{\Sigma y_{ik}}$$

$$D_{۰۱} = D_{۱۱} = D_{۲۲} = D_{۲۳} = ۱$$

وسایر D_{ik}ها نیز صفر هستند.

در اینجا، هنگامی که ماشین در حالت ۰ و ۱ باشد تصمیم ۱ یعنی رها کردن، زمانی که ماشین در حالت ۲ باشد، تصمیم ۲ یعنی پیاده کردن، و هنگامی که در حالت ۳ است، تصمیم ۳ یعنی تعویض را توصیه می‌کند.

کاربرد زنجیره‌های مارکوف در فروش و بازاریابی [۳۴]

فرض کنید در بازار خاصی ۳ مارک، الف، ب و ج برای یک محصول که متناوباً خریداری می‌شود وجود داشته باشد. این ۳ مارک متعلق به ۳ فروشنده است که مصرف هر مارک به سهولت با

مارک دیگر قابل جایگزین است. هر مصرف کننده بسته به مارکی که فعلاً مصرف می‌کند در یکی از حالتهای الف، ب و ج قرار دارد. هر خریدار ممکن است در هر زمان تصمیم خاصی بگیرد که می‌تواند تغییراز یک حالت (مارک) به دیگری را نتیجه دهد. علاوه بر این فرض این است که تعداد مارکها (حالتها) و تعداد مشتریان در بازار محدود و ثابت هستند. بنابراین فرایند می‌تواند به عنوان یک زنجیره مارکوف مورد تجزیه و تحلیل قرار گیرد. یک مطالعهٔ تحقیقات بازاریابی تعداد کل مشتری برای این محصول را ۱۰۰۰ نفر نشان می‌دهد. همچنین تعداد مشتریان هر مارک را برای دو ماه متوالی مهر و آبان در جدول زیر نشان می‌دهد:

میزان فروش دو ماه

مارک	تعداد مشتریان	
	مهر	آبان
الف	۲۰۰	۲۲۰
ب	۵۰۰	۴۹۰
ج	۳۰۰	۲۹۰

جدول فوق تنها میزان افزایش یاکاهش کلی مشتریان هر مارک را نشان می‌دهد. ولی باید تعداد کاهشها (از دست دادن مشتری) و افزایشها (جلب مشتری) جداگانه نشان داده شود که در جدول شماره ۲ ارائه می‌شود.

تغییرات طی یک ماه

مارک	تعداد مشتریان در مهرماه	تعداد جلب مشتری	تعداد مشتریان از دست رفته	تعداد مشتریان در آبان ماه
الف	۲۰۰	۶۰	۴۰	۲۲۰
ب	۵۰۰	۴۰	۵۰	۴۹۰
ج	۳۰۰	۳۵	۴۵	۲۹۰

جدول شماره ۲

با توجه به اطلاعات فوق می‌توان احتمالات ماندگاران برای هر مارک را محاسبه کرد که چگونگی محاسبه در جدول شماره ۳ آمده است:

احتمالات ابقای مشتریان

مارک	تعداد مشتریان مهرماه	تعداد مشتریان از دست رفته	تعداد ماندگاران	احتمال ابقا
الف	۲۰۰	۴۰	۱۶۰	$\frac{۱۶۰}{۲۰۰} = ۰/۸$
ب	۵۰۰	۵۰	۴۵۰	$\frac{۴۵۰}{۵۰۰} = ۰/۸۵$
ج	۳۰۰	۴۵	۲۵۵	$\frac{۲۵۵}{۳۰۰} = ۰/۸۵$

جدول شماره ۳

اما برای انجام یک تجزیه و تحلیل کامل به دست آوردن ماتریس انتقال زنجیره‌های مارکوف به تک تک انتقالات از هر مارک به دیگری نیاز است که در جدول شماره ۴ آمده است:

نقل و انتقالات کامل مشتریان

مارک	تعداد مشتریان مهرماه	جلب مشتری از			از دست دادن به			تعداد مشتریان آبان ماه
		الف	ب	ج	الف	ب	ج	
الف	۲۰۰	۰	۳۵	۲۵	۰	۲۰	۲۰	۲۲۰
ب	۵۰۰	۲۰	۰	۲۰	۳۵	۰	۱۵	۴۹۰
ج	۳۰۰	۲۰	۱۵	۰	۲۵	۲۰	۰	۲۹۰

جدول شماره ۴

ماتریس انتقال حاصل از اطلاعات فوق بدین صورت است:

$$\begin{array}{c|ccc} & \text{الف} & \text{ب} & \text{ج} \\ \hline \text{الف} & \frac{۱۶۰}{۲۰۰}=۰/۸ & \frac{۲۰}{۲۰۰}=۰/۱ & \frac{۲۰}{۲۰۰}=۰/۱ \\ \text{ب} & \frac{۳۵}{۵۰۰}=۰/۰۷ & \frac{۴۵۰}{۵۰۰}=۰/۹ & \frac{۱۵}{۵۰۰}=۰/۰۳ \\ \text{ج} & \frac{۲۵}{۲۰۰}=۰/۰۸۳ & \frac{۲۰}{۳۰۰}=۰/۰۶۷ & \frac{۲۵۵}{۳۰۰}=۰/۸۵ \end{array}$$

ماتریس فوق احتمالات نقل و انتقال مشتریان از مارکهای الف، ب و ج را به یکدیگر بطور کامل نشان می‌دهد.

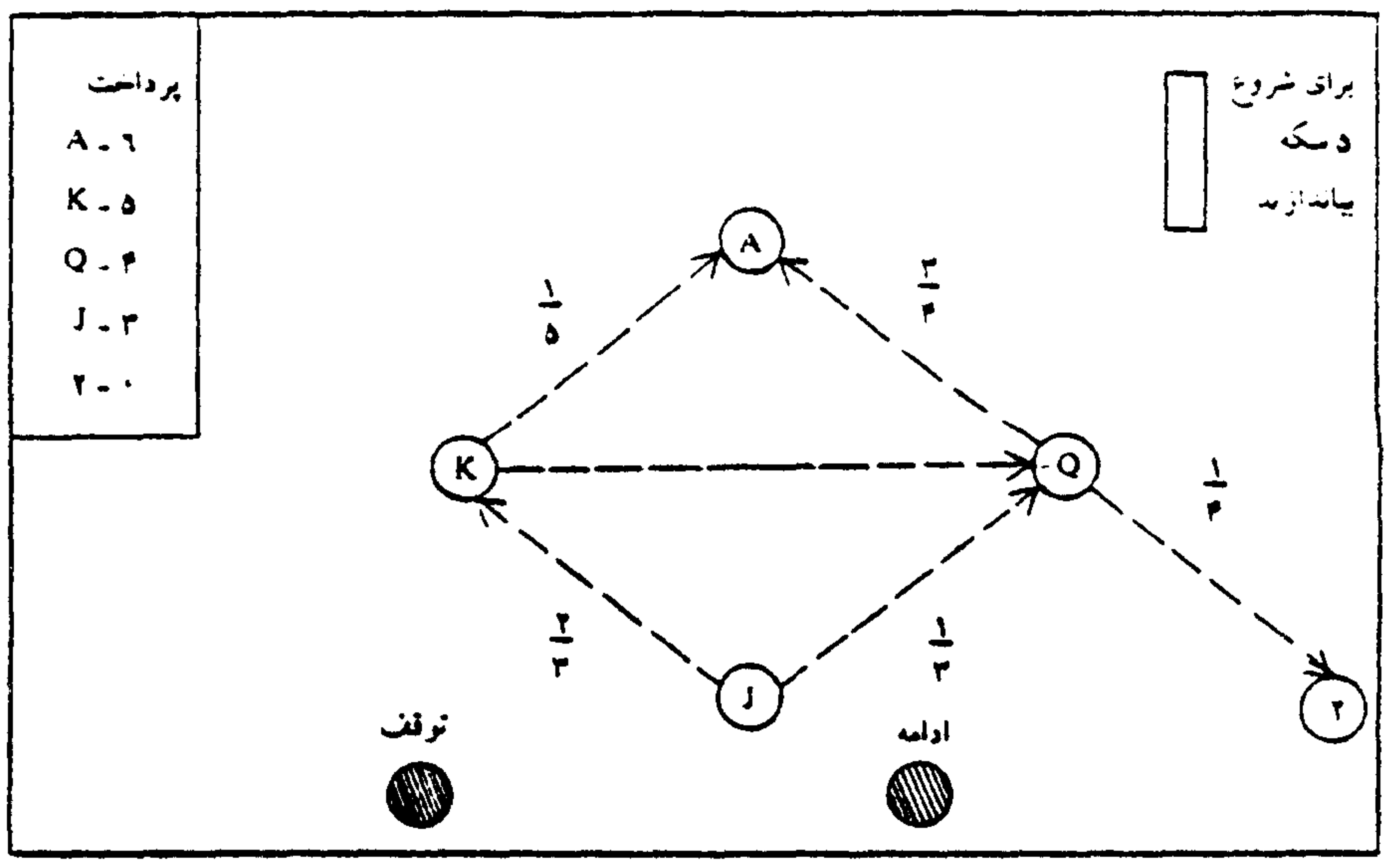
با توجه به ماتریس فوق می‌توان تعداد مشتریان هر مارک را برای آذر ماه برآورد کرد. بدین منظور سهم بازار هر مارک در آبان ماه محاسبه، و در ماتریس انتقال ضرب می‌شود:

$$\underset{\text{سهم آبان ماه}}{\begin{array}{ccc}\text{الف} & \text{ب} & \text{ج}\\ [0/22 & 0/49 & 0/29]\end{array}} = \begin{bmatrix} 0/8 & 0/1 & 0/1 \\ 0/07 & 0/9 & 0/03 \\ 0/083 & 0/067 & 0/85 \end{bmatrix} = \underset{\text{سهم آذرماه}}{\begin{array}{ccc}\text{الف} & \text{ب} & \text{ج}\\ [0/234, & 0/483, & 0/283]\end{array}}$$

یعنی احتمالاً سهم بازار هر مارک در آذر ماه به ترتیب ۰/۲۳۴، ۰/۴۸۳ و ۰/۲۸۳ برای مارکهای الف، ب و ج خواهد بود.

توقف بهینه [۳۵]

فرض کنید X یک زنجیره مارکوف با فضای حالت E و ماتریس انتقال P بوده و f یک تابع مقید تعریف شده در E باشد. هر گاه کسی بخواهد می‌تواند فرایند X را مشاهده، و هنگامی که بخواهد، توقف کند، اگر در زمان توقف، فرایند در حالت J باشد، $f_{(J)}$ دریافت می‌کند و بازی تمام شده است. اگر هرگز متوقف نشود دریافت او صفر است ولی فرد مایل به بهینه کردن دریافت خود است. ماشینهای بازی در بعضی از خیابانها مشاهده می‌شود، شکل شماره ۲ نیز ماشین بازی در این موضوع است:



شکل شماره ۲ - ماشین توف بهینه: ماشین مقدار مربوط به علامتی راکه هنگام فشار دکمه «توقف» روشن می‌شود می‌پردازد.

هنگامی که تعداد سکه‌های افتاده در ماشین ۵ تا باشد، ماشین با روشن شدن یکی از پنج علامت بکار می‌افتد. فرض کنید که $X_0(w)=J$ باشد. با فشار دکمه «توقف» بازیکن می‌تواند $f_{(J)}=3$ سکه را دریافت کند. اگر او دکمه «ادامه» را فشار دهد آنگاه Q یا K با احتمالات مشخص شده بالای پیکانهای مربوط روشن خواهد شد. دقت کنید که در این مورد دریافت بیش از J است و بازیکن دکمه «ادامه» را فشار می‌دهد، اگر علامت Q روشن شود (یعنی $X_1(w)=Q$ باشد)، تصمیم‌گیری مشکلتر است.

با توقف او مطمئن است که $f(Q)=4$ سکه را دریافت می‌کند، در حالی‌که اگر ادامه دهد شانس بردن ۶ سکه یا نبردن هیچ سکه‌ای را دارد. از آنجاکه بعد از A,Q یا ۲ با احتمالات مربوط $\frac{3}{4}$ و $\frac{1}{4}$ روشن می‌شوند، اگر او ادامه دهد، دریافت مورد انتظار $\frac{3}{4}f(A)+\frac{1}{4}f(2)=4/5$ سکه است. این مقدار بیش از $f(Q)=4$ است. و توقف را انتخاب نمی‌کند و دکمه «ادامه» را فشار می‌دهد. وقتی که $X_2(w)=A$ باشد او $f(A)=6$ سکه دریافت می‌کند.

بطور خلاصه اگر علامت روشن شده J یا Q باشد استراتژی بهینه «ادامه» و هنگامی که علامت روشن شده A,K یا ۲ باشد، استراتژی بهینه «توقف» است. (در مورد آخر یعنی ۲، ماشین بطور اتوماتیک خاموش می‌شود.) بنابراین بسته به احتمال برنده شدن یک بازیکن، بازی با استفاده از استراتژی بهینه ۵، ۶ و یا صفر سکه پایان خواهد یافت. برای مثال اگر پیشامدها که اتفاق می‌افتد به گونه‌ای باشد که $X_0(w)=K$ باشد، آنگاه زمان توقف بهینه $T(w)=0$ است، و دریافت $f(k)=5$ است. اگر $X_0(w)=Q$ و $X_1(w)=2$ باشد، زمان توقف بهینه $T(w)=1$ است و دریافت $f(2)=0$ است. اگر $X_0(w)=Q$ و $X_1(w)=A$ باشد، زمان توقف بهینه باز هم $T(w)=1$، و دریافت $f(A)=6$ است. با توجه به عبارت «بهینه»، لازم است دقت شود که هر پیشامد ضرورتاً دریافت حداکثر را به همراه ندارد.

روشن است که زمان توقف یک متغیر تصادفی T است که مقادیر تعیین شده توسط مسیر $X_0,X_1,\ldots$ از زنجیره مارکوف X را

به خود می‌گیرد. در هر زمان n، تصمیم به توقف یا ادامه باید بر اساس علم به مسیر موجود در آن زمان باشد. از این رو برای هر $W\in S$ که $T(w)=n$ باشد یا نباشد باید کاملاً توسط مسیر $X_n(w)$و... و $X_1(w)$ و $X_0(w)$ که تا زمان n مشاهده شده است تعیین شود. چون T یک زمان توقف برای هر n است.

در زمان توقف T، فرایند در حالت X_T است، و بنابراین دریافت $f(X_T)$ خواهد بود. انتخاب یک زمان توقف T به انتخاب یک استراتژی بستگی دارد و برای زمانهای توقف مختلف T، دریافتهای مورد انتظار $E_i[f(X_T)]$ متفاوت خواهد بود. انتخاب یک زمان توقف T که دریافت (ماکزیمم) حداکثر باشد جالب است، که مسأله زیر بدین منظور مطرح می‌شود:

مسأله:

الف) تابع زیر را محاسبه کنید:

$V_{(i)}=\sup_T E_i\,[f(X_T)]$ و $i\in E$

جایی که sup (سوپریمم) حداکثر زمان ممکن است.

ب) زمان توقف T_0 را به گونه‌ای بیابید که:

$V_{(i)} = E_i\,[\, f(X_{T_0})]\,,\ i\in E$ باشد.

تابع f تابع پرداخت نامیده می‌شود و تابع V ارزش بازی است. یک زمان توقف T_0 که در قسمت ب صدق کند یک زمان توقف بهینه نامیده می‌شود. اکنون این مسأله برای مثال ماشین بازی فوق فرموله می‌شود که X یک زنجیره مارکوف با فضای حالت $E=\{A,K,J,2\}$ و ماتریس انتقال زیر است:

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{4}{5} & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

تابع دریافت (۰،۳،۴،۵،۶) =f است. حالتهای A و ۲ جاذب هستند، با شروع دریکی از این حالتها، زنجیره در حالت اولیه باقی می‌ماند. بنابراین $V(A)=6$ و $V(2)=0$ است. با شروع از حالت Q، اگر بلافاصله توقف شود، دریافت $f(Q)=4$ است، وگرنه مرحله بعدی به A یا ۲ منجر می‌شود. بنابراین توقف یک دریافت مورد انتظار $\frac{3}{4}(6)=4/5$ را ندارد. و $V(Q)=4/5$ بهترین امکان است. با شروع از K، توقف بلافاصله یک دریافت $f(K)=5$ بهمراه دارد؛ وگرنه ممکن است زنجیره به A (با احتمال $\frac{1}{5}$ و دریافت $f(A)=6$) حرکت کند یا ممکن است به Q (با احتمال $\frac{3}{4}$ و شروع Q، که تجزیه و تحلیل، یک دریافت مورد انتظار $V(Q)=4/5$ را نشان می‌دهد) حرکت کند. بنابراین، با عدم توقف در K، دریافت مورد انتظار بهینه $\frac{1}{5}V(A)+\frac{4}{5}V(Q)=4/8$ می‌شود، در صورت توقف در K دریافت مورد انتظار $f(K)=5$ می‌شود. از این رو توقف بلافاصله در K بهتر است و دریافت مورد انتظار $V(k)=f(k)=5$ است. با شروع از J، ناخواسته به توقف منجر می‌شود. با انتظار یک مرحله بیشتر، یا K روشن می‌شود که $V(k)=5$ است یا Q روشن می‌شود که دریافت مورد انتظار $V(Q)=4/5$ است. از این رو با شروع در J، استراتژی بهینه، انتظار است، و سپس دریافت مورد انتظار:

از این رو برای این مثال، ارزش بازی برابر با (۰،۴/۸۳۳،۴/۵، ۵ و ۶) = V است. استراتژی بهینه برای توقف تنها وقتی است که علامت روشن شده A یا K و یا ۲ باشد. به عبارت دیگر T_0 زمان اولین ملاقات با مجموعه حالتهای $\{A,K,2\}$ است. دقت شود که این مجموعه، مجموعهٔ حالتهای J برای $f(J)=V(J)$ نیز هست.

زنجیره‌های مارکوف و مدل منبع آب (سدّ)

یک سدّ چند منظوره برای تولید نیروی الکتریسته و کنترل سیل مورد استفاده قرار می‌گیرد. ظرفیت سدّ ۳ واحد است. توزیع احتمال مقدار آب w_t که در سدّ طی ماه t (... و ۱ و ۰ = t) در جریان است، $P_w(m)$ نشان داده می‌شود که به این صورت است:

$$P_w(0)=P\{w=0\}=\frac{1}{6}$$

$$P_w(1)=P\{w=1\}=\frac{1}{3}$$

$$P_w(2)=P\{w=2\}=\frac{1}{3}$$

$$P_w(3)=P\{w=3\}=\frac{1}{6}$$

فرض کنید X_t مقدار آب موجود در سدّ در زمان t باشد، آنگاه $X_t = 0,1,2,3,$ است. ماتریس انتقال برای این مسأله به صورت زیر است:

حالت	۰	۱	۲	۳
۰	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
۱	۰	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
۲	۰	۰	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$
۳	۰	۰	۰	۱

برای مثال، عنصر سطر دوم و ستون چهارم P_{13} بدین ترتیب به دست می‌آید. اگر حالا یک واحد آب در سد باشد، آنگاه برای ۳ واحد آب در یک ماه بعد، باید در ماه جاری ۲ یا ۳ واحد آب در دست می‌آید. اگر حالا یک واحد آب در سدّ باشد، آنگاه برای ۳ واحد آب در یک ماه بعد، باید در ماه جاری ۲ یا ۳ واحد آب در سدّ جریان داشته باشد (به خاطر داشته باشید که سدّ ۳ واحد ظرفیت دارد به گونه‌ای که بیش از ۳ واحد آب مازاد آن از طریق دریچه تخلیه خواهد شد). این مقدار آب به احتمال $\frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}$ در جریان خواهد بود.

اما با داشتن هزینه‌های مختلف برای جریان آب و ارزشهای حاصل از تولید برق و آبیاری و ... می‌توان تصمیم مناسبی برای کنترل آب داشت.

1. Stochastic Processes

2. Hillier and Lieberman, Operations Research, Second Edition, (SanFrancisco: Holden - Day,inc., 1974). P.350.

3. Markov Chains.

4. Erhan Cinlar, Introduction to Stochastic Processes, (Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice - Hall, Inc. 1975), P.107.

5. Transition Probability.

6. transition Matrix.

7. Hillier and Lieberman, OP.,Cit,P.352.

8. Chapman - Kolmogrov Equation.

9. Ibid, PP.353 - 355.

10. Recurrent.

11. Transient

12. Erhan Cinlar, OP.,Cit, P.125.

13. Periodic.

14. Period.

15. Ibid, P.125.

16. Aperiodic.

17. Hillier and Lieberman, OP., Cit, P.360.

18. Communication.

19. Ibid, P.359.

20. Closed.

21. Erhan Cinlar, OP., Cit, PP,127 - 129.

24. Steady State.

25. Lawrence L.Lapin, Quantitative Methods for Business Decisions, (New York; Harcourt Brace Jouanovich, Inc., 1976). PP.699 - 707.

26. Limiting.

27. stationary.

28. DonaldGross and Carl M.Harris, Fundementals of Queueing Theory, Second Edition, (New York: John Wiley and Sons, Inc., 1985). PP.42 - 47.

۲۹ - راعی.رضا، «کاربرد زنجیره‌های مارکوف در برنامه‌ریزی نیروی انسانی»، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه تهران، دانشکده علوم اداری و مدیریت بازرگانی، خرداد ۱۳۷۰.

30. Hillier and Lieberman, OP., Cit, PP.351 - 353.

31. Ibid, PP. 534 - 550.

۳۲ - چون رها کردن ماشین یا پیاده کردن آن در صورتی که غیر قابل استفاده باشد در تصمیمات نهی شده است، هزینه آن بی‌نهایت فرض شده است.

۳۳ - $P_{ij}(k)$ احتمال انتقال مربوطهٔ وابسته به تصمیم k می‌باشد.

34. Levin and Kirkpatrick; Quantitative Approches to Management (New York, McGrow - Hill,Inc, 1975.).

35. Optimal Stopping.

36. Hillier and Lieberman, OP., Cit, PP.561- 563.